

Abschätzungen der Hausdorff-Dimension invarianter Mengen dynamischer Systeme auf Mannigfaltigkeiten unter besonderer Berücksichtigung nicht invertierbarer Abbildungen

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades

Doctor rerum naturalium
(Dr. rer. nat.)

vorgelegt

der Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften
der Technischen Universität Dresden

von

Dipl.-Math. Franz geb. Mirle, Astrid Ruth
geb. am 03.10.1971 in Löbau

Gutachter: Doz. Dr. V. Reitmann (Technische Universität Dresden)
Priv.-Doz. Dr. J. Schmeling (Freie Universität Berlin)
Prof. Dr. G. A. Leonov (St. Petersburg State University)

Eingereicht am: 10. September 1998

Tag der Verteidigung: 4. Dezember 1998

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
Allgemeine Bezeichnungen	5
1 Grundlagen	7
1.1 Multilineare Algebra	7
1.2 Singulärwertfunktion einer Abbildung	8
1.3 Riemannsche Mannigfaltigkeiten	10
1.4 Elemente der Maß- und Integrationstheorie	17
1.5 Integration von Dichten auf nicht orientierbaren Mannigfaltigkeiten .	20
1.6 Dynamische Systeme	22
1.7 Hausdorff-Dimension und Abschätzung nach Douady und Oesterlé . .	24
1.8 Topologische Entropie und Bowen-Kugeln	27
1.9 Hyperbolische Mengen, Lyapunov-Exponenten	28
1.10 Untere Dimensionsschranken nach Frostman und Shereshevskij	33
2 Hausdorff-Maß-expandierende Abbildungen	35
2.1 Eine Klasse von Hausdorff-Maß-expandierenden Abbildungen	35
2.2 Obere Dimensionsschranken	38
2.3 Einbeziehung von Lyapunov-Funktionen	40
2.4 Anwendungsbeispiele	43
2.4.1 Stückweise lineare Abbildungen in \mathbb{R}^n	43
2.4.2 Modifizierte Hufeisenabbildungen	44
3 Dimensionsabschätzungen mit Hilfe der Vielfachheitsfunktion	47
3.1 Die Vielfachheitsfunktion einer Abbildung	47
3.2 Einführung subadditiver Integrale	56
3.3 Äußere Integrale unter Transformationen	63
3.4 Obere Dimensionsschranken	74
3.5 Anwendungsbeispiele	78
3.5.1 Stückweise lineare Abbildungen in \mathbb{R}^n	78
3.5.2 Stückweise lineare Abbildungen auf dem Zylinder	80

3.5.3	Julia-Mengen von Polynomen in der komplexen Ebene	81
3.5.4	Iterierte Funktionensysteme	85
3.5.5	Hufeisenabbildungen	89
3.5.6	Belykh-Abbildungen	93
4	Dynamische Systeme mit einer äquivarianten Zerlegung des Tangentialbündels	101
4.1	Invertierbare dynamische Systeme	101
4.2	Die Klasse der k -1-Endomorphismen	107
4.3	Obere Dimensionsschranken für k -1-Endomorphismen	115
4.4	Anwendungsbeispiele	118
4.4.1	Hufeisenabbildungen	118
4.4.2	Geodätische Flüsse	121
4.4.3	Stückweise lineare Abbildungen auf dem Zylinder	123
4.4.4	Julia-Mengen von Polynomen in der komplexen Ebene	124
4.4.5	Iterierte Funktionensysteme	124
5	Untere Dimensionsschranken für k-1-Endomorphismen	127
5.1	Untere Dimensionsabschätzung	128
5.2	Anwendungsbeispiele	131
5.2.1	Zeltabbildung	131
5.2.2	Stückweise lineare Abbildungen auf dem Zylinder	132
5.2.3	Julia-Mengen	132
	Literaturverzeichnis	134

Einleitung

Dynamische Systeme sind mathematische Objekte zur Beschreibung der Zeitentwicklung physikalischer, biologischer und anderer real existierender Systeme. Das Langzeitverhalten des Systems wird durch asymptotische Grenzmengen charakterisiert, an die sich die Bewegungen des Systems im Verlauf der Zeit immer mehr annähern. Asymptotische Grenzmengen sind invariant unter dem dynamischen System. Eine komplizierte geometrische Struktur dieser Mengen, beschrieben durch verschiedene nichtganzzahlige Dimensionen, ist oftmals auch Ausdruck einer chaotischen Dynamik. Deshalb kommt Dimensionsuntersuchungen invarianten Mengen von dynamischen Systemen eine große Bedeutung zu. Dabei ist die Hausdorff-Dimension eine der wichtigsten Dimensionsarten, die auch nichtganzzahlige Werte annehmen können.

Die exakte Bestimmung der Hausdorff-Dimension von Attraktoren oder, allgemeiner, von invarianten Mengen dynamischer Systeme ist nur in Ausnahmesituationen möglich. Dagegen lassen sich Oberschranken dieser Dimension für die invarianten Mengen vieler Klassen kontrahierender Systeme angeben. Zeigt man nämlich, daß das äußere Hausdorffsche d -Maß der invarianten Menge unter dem dynamischen System mit wachsender Zeit gegen Null geht, so ist die Hausdorff-Dimension der invarianten Menge nicht größer als d .

Erste Ergebnisse in dieser Richtung für C^1 -Abbildungen in \mathbb{R}^n stammen von J. Mallet-Paret ([50]), A. Douady und J. Oesterlé ([18]) und Yu. S. Il'yashenko und A. N. Chetaev ([39]). Diese Ergebnisse wurden von R. Temam und P. Thieullen ([69, 70]) auf Hilbert- und Banachräume und von A. Noack und V. Reitmann ([58]) sowie von F. Ledrappier ([45]) auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten erweitert. Die Verallgemeinerung auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten schließt Ergebnisse von G. A. Leonov und V. A. Boichenko ([46, 47]) unter Verwendung von Lyapunov-Funktionen mit ein. Auf stückweise glatte Abbildungen wurden diese Aussagen von V. Reitmann und U. Schnabel ([63]) erweitert. In allen diesen Arbeiten wird gezeigt, daß sich lokal das äußere Hausdorffsche d -Maß des Bildes einer Überdeckungskugel im Tangentialraum unter der Tangentialabbildung verkleinert. In diese Kontraktionsbedingung gehen die Singulärwerte der Tangentialabbildung ein. Da die Abbildung somit in allen Punkten der invarianten Menge kontrahierend wirken muß, ergibt sich eine globale Kontraktionsbedingung für das Hausdorffsche d -Maß der gesamten Menge. Für invariante Mengen von Diffeomorphismen und Flüssen mit einer zusätzlichen hyperbolischen Struktur sind von A. Fathi und X. Gu ([22, 29]) globale Kontraktionsbedingungen für

das äußere Hausdorffsche d -Maß unter Verwendung globaler Lyapunov-Exponenten und der topologischen Entropie entwickelt worden. Dabei wird die invariante Menge durch sogenannte Bowen-Kugeln oder dynamische Kugeln überdeckt.

Untere Dimensionsabschätzungen, die auch nichtganzzahlige Werte liefern können, basieren oftmals auf potentialtheoretischen Aussagen wie dem Lemma von Frostman ([20, 32, 61]), das die Existenz eines speziellen äußeren Maßes, konzentriert auf der invarianten Menge, ausnutzt. Für Mengen in \mathbb{R} und \mathbb{R}^2 ist von M. A. Shereshevskij in [66] eine Methode der unteren Abschätzung der Hausdorff-Dimension vorgestellt worden, die ohne Verwendung eines äußeren Maßes auskommt.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, für obere Schranken der Hausdorff-Dimension die Kontraktionsbedingung für das äußere Hausdorffsche d -Maß unter Ausnutzung der Nichtinjektivität der Abbildung, die das dynamische System erzeugt, abzuschwächen. Geht man, wie in den oben zitierten Arbeiten, von einer Kugelüberdeckung der invarianten Menge aus und bildet jede dieser Kugeln durch die gegebene Abbildung ab, dann gibt es bei nicht injektiven Abbildungen Regionen der invarianten Menge, die mehrfach überdeckt werden. Dadurch kann die Abbildung kontrahierend auf das äußere Hausdorffsche d -Maß der gesamten invarianten Menge wirken, auch wenn die globale Kontraktionsbedingung in Punkten mit mehreren Urbildern nicht erfüllt ist, da dort die Anzahl der zur Überdeckung notwendigen Kugeln reduziert werden kann. Gleichzeitig soll für eine spezielle Klasse von nicht injektiven Abbildungen auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten eine untere Dimensionsabschätzung hergeleitet werden.

Es sei bemerkt, daß von B. R. Hunt in [37] für C^1 -Abbildungen in \mathbb{R}^n die obere Schranke für die Hausdorff-Dimension aus dem Satz von Douady und Oesterlé sogar für die obere Kapazitive Dimension gezeigt wurde. Dabei wurde die Gitterstruktur des \mathbb{R}^n ausgenutzt. Basierend auf einer Arbeit von Z.-M. Chen ([15]) kann man die obere Kapazitive Dimension von invarianten Mengen von C^1 -Abbildungen auf allgemeinen Riemannschen Mannigfaltigkeiten nach oben mit den Methoden von A. Douady und J. Oesterlé wie in [9] abschätzen. Auf diese Weise lassen sich zu allen in dieser Arbeit entwickelten oberen Abschätzungen der Hausdorff-Dimension analoge Schranken für die obere Kapazitive Dimension formulieren.

Geben wir nun einen kurzen Überblick über den Inhalt der vorliegenden Arbeit. In Kapitel 1 werden einige der im weiteren benötigten Grundlagen der multilinearen Algebra, der Riemannschen Geometrie, der Integrationstheorie sowie die Definitionen der Hausdorff-Dimension und der topologischen Entropie bereitgestellt. Bekannte obere Dimensionsabschätzungen von A. Douady und J. Oesterlé, A. Fathi und X. Gu werden zitiert. In diesen Abschätzungen werden globale Kontraktionsbedingungen für das äußere Hausdorffsche d -Maß mittels der Singulärwerte der Tangentialabbildung oder für hyperbolische Systeme mittels globaler Lyapunov-Exponenten und der topologischen Entropie der Abbildung formuliert. Für die untere Dimensionsabschätzung wird das Lemma von Frostman und ein Satz von Shereshevskij kurz dargestellt.

Die Kapitel 2 und 3 befassen sich mit allgemeinen nicht injektiven Abbildungen auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Es wird gezeigt, wie durch Einbeziehung der Nichtinjektivität die aus dem für Riemannsche Mannigfaltigkeiten verallgemeinerten Satz von Douady und Oesterlé stammende Kontraktionsbedingung für das äußere Hausdorffsche d -Maß abgeschwächt werden kann. In Kapitel 2 wird eine Klasse von Abbildungen betrachtet, die expandierend bezüglich des äußeren Hausdorffschen d -Maßes wirkt. Der Expansionsfaktor $a \geq 1$ kann dabei als „Grad der Nichtinjektivität“ interpretiert werden. Für solche Abbildungen existiert nämlich eine Folge von Teilmengen $\{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ der invarianten Menge, deren äußeres Hausdorffsches d -Maß jeweils um den Faktor $(1/a)^j$ kleiner ist als das äußere Maß der gesamten Menge K . Nach j Iterationen der Abbildung stimmen die äußeren Hausdorffschen d -Maße der Bilder von K_j und K jedoch überein. Unter diesen Voraussetzungen kann man zeigen, daß die obere Schranke 1 an die Singulärwertfunktion, die die Kontraktion des äußeren Hausdorffschen d -Maßes garantiert, auf a vergrößert werden kann.

In Kapitel 3 wird die Vielfachheitsfunktion der Abbildung eingeführt, die zu einem beliebigen Punkt jeweils die Anzahl der Urbilder unter der Abbildung innerhalb einer bestimmten Menge angibt. Wenn die zugrundeliegende Mannigfaltigkeit orientierbar ist und die Determinante der Linearisierung der gegebenen Abbildung auf der gesamten Menge positiv ist, stimmt die Vielfachheitsfunktion mit dem lokalen Abbildungsgrad überein ([68]). Für kompakte Teilmengen Riemannscher Mannigfaltigkeiten ohne kritische Punkte, d. h. ohne Punkte, in denen der Betrag der Determinante der Tangentialabbildung verschwindet, werden die Eigenschaften der Vielfachheitsfunktion analysiert, und es wird unter anderem gezeigt, daß die Vielfachheitsfunktion immer nach oben beschränkt ist.

Weiterhin werden, in Anlehnung an H. Wegmann ([73]), äußere Hausdorff-Integrale für nichtnegative Funktionen definiert, die für den Fall der Integration über charakteristische Funktionen den gewichteten Hausdorff-Maßen aus [36] entsprechen. Diese äußeren Integrale weisen wichtige Integraleigenschaften auf, sind aber im Gegensatz zu Integralen nicht additiv, sondern nur subadditiv. In Anlehnung an Aussagen zum Verhalten von Integralen unter Variablentransformationen werden Schrankensätze für die Transformation der äußeren Hausdorff-Integrale unter nicht notwendigerweise injektiven Abbildungen entwickelt, die aufgrund der Subadditivität keine Gleichungen, sondern nur Ungleichungen sind. Diese Schrankensätze werden angewendet, um in die obere Dimensionsabschätzung nach A. Douady und J. Oesterlé die Vielfachheitsfunktion der Abbildung mit einzubeziehen und so eine schwächere Kontraktionsbedingung zu erhalten. Da die Vielfachheitsfunktion der Abbildung vom jeweils betrachteten Punkt der Menge abhängt, erhält man anstelle der globalen Kontraktionsbedingung für die Singulärwerte der Tangentialabbildung eine schwächere lokale Bedingung. Im Falle der Nichtbeachtung der Vielfachheit der Abbildung geht diese in die bekannte Bedingung nach A. Douady und J. Oesterlé über.

Kapitel 4 der Arbeit ist der Abschwächung des Konzepts der hyperbolischen Mengen gewidmet. Es werden Mengen mit einer äquivarianten Zerlegung des Tangen-

tialbündels betrachtet, d. h. mit einer Zerlegung, die unter der Tangentialabbildung invariant bleibt. Eine äquivariante Zerlegung des Tangentialbündels ermöglicht die Betrachtung der auf die jeweiligen Teilbündel eingeschränkten Tangentialabbildung, entweder in der ursprünglichen Zeitrichtung oder in umgekehrter Zeitrichtung. Im Gegensatz zu hyperbolischen Mengen werden hier aber keine Voraussetzungen bezüglich der Streckungs- und Stauchungseigenschaften der Tangentialabbildung in den Teilräumen gestellt. Unter diesen abgeschwächten Bedingungen können für invariante Mengen von Diffeomorphismen und Flüssen ähnliche obere Dimensionsschranken wie die von A. Fathi und X. Gu für hyperbolische Mengen erreicht werden, die sowohl in der Sprache der Singulärwerte als auch der globalen Lyapunov-Exponenten der Tangentialabbildung und der topologischen Entropie der Abbildung formuliert werden können. Analog zu [22, 29] werden hier zur Überdeckung der invarianten Menge Bowen-Kugeln herangezogen. Aufgrund einer im Vergleich zu [29] anderen Beweistechnik kann die Glattheit der betrachteten Systeme von C^2 auf C^1 verringert werden. Außerdem erweist sich die „pinching condition“, die die stetige Abhängigkeit der äquivarianten Zerlegung des Tangentialbündels vom Punkt der Mannigfaltigkeit garantiert, als überflüssig.

Anschließend wird gezeigt, daß sich diese Beweistechnik auch auf k -1-Endomorphismen als eine spezielle Klasse nicht injektiver Abbildungen anwenden läßt. Bei diesen in [54] eingeführten k -1-Endomorphismen handelt es sich um Abbildungen, bei denen jeder Punkt genau k Urbilder hat. Dann kann der Faktor k ausgenutzt werden, um die Kontraktionsbedingungen für das äußere Hausdorffsche d -Maß im Vergleich zu Diffeomorphismen abzuschwächen.

Kapitel 5 setzt die Untersuchung von k -1-Endomorphismen fort. Hier wird unter Ausnutzung der Überlegungen von M. A. Shereshevskij ([66]) gezeigt, daß sich aufgrund der speziellen Struktur der invarianten Menge eines k -1-Endomorphismus sogar eine untere Schranke der Hausdorff-Dimension ableiten läßt. Dazu wird die Vorgehensweise von M. A. Shereshevskij, die ursprünglich für Mengen in \mathbb{R} entwickelt wurde, auf Teilmengen allgemeiner metrischer Räume verallgemeinert.

Am Ende jedes Kapitel wird eine breite Palette von Beispielsystemen betrachtet, um die Leistungsfähigkeit der entwickelten Dimensionsabschätzungen im Vergleich zu bekannten Dimensionsschranken zu demonstrieren. Es werden Hufeisenabbildungen und iterierte Funktionensysteme analysiert, die bei der Modellierung vieler real existierender Systeme auftreten. Einige Systeme aus der Phasensynchronisation werden durch Belykh-Abbildungen beschrieben ([8]). Diese sind in ihrer Grundform injektiv, können aber durch geeignete Faktorisierung in nicht invertierbare Abbildungen überführt werden, so daß die Vielfachheitsfunktion gewinnbringend ausgenutzt werden kann. An Julia-Mengen quadratischer Polynome in der komplexen Ebene läßt sich sowohl die Verwendung der Vielfachheitsfunktion und einer äquivarianten Zerlegung des Tangentialbündels als auch die Interpretation als 2-1-Endomorphismus demonstrieren.

Allgemeine Bezeichnungen

\mathbb{N}	bezeichne die Menge der natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \dots\}$.
\mathbb{N}_0	$= \mathbb{N} \cup \{0\}$.
\mathbb{Z}	bezeichne die Menge der ganzen Zahlen $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
\mathbb{Q}	sei die Menge der rationalen Zahlen.
\mathbb{R}	bezeichne die Menge der reellen Zahlen.
\mathbb{R}_+	$= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.
\mathbb{R}_{0+}	$= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.
$\overline{\mathbb{R}}$	bezeichne die Menge der erweitert reellen Zahlen $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Dabei gelten für die uneigentlichen Zahlen $-\infty$ und $+\infty$ die Rechenregeln $\alpha + (\pm\infty) = \pm\infty$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$, $\alpha \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ für $\alpha > 0$, $\alpha \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$ für $\alpha < 0$ und $0 \cdot (\pm\infty) = 0$. Nicht erklärt ist $(-\infty) + (+\infty)$. Die Relation $<$ (bzw. \leq) wird auf $\overline{\mathbb{R}}$ ausgedehnt durch $-\infty < \alpha < +\infty$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.
$\overline{\mathbb{R}}_+$	$= \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x > 0\}$.
$\overline{\mathbb{R}}_{0+}$	$= \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x \geq 0\}$.
\mathbb{C}	bezeichne die Menge der komplexen Zahlen.
$M_{n,m}(X)$	mit einer Menge X bezeichne die Menge aller $n \times m$ -Matrizen, deren Elemente aus X sind.
$\lfloor d \rfloor$	bezeichne zu einer Zahl $d \in \mathbb{R}$ die größte ganze Zahl, die kleiner als d ist.
$\lfloor d \rfloor$	bezeichne zu einer Zahl $d \in \mathbb{R}$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als d ist.
$\lceil d \rceil$	bezeichne zu einer Zahl $d \in \mathbb{R}$ die kleinste ganze Zahl, die nicht kleiner als d ist.

Sind $f : X_f \rightarrow Y_f$ und $g : X_g \rightarrow Y_g$ zwei Abbildungen, dann bezeichne

$f + g$ die Funktion $x \mapsto f(x) + g(x)$, falls $X_f = X_g$ und $Y_f = Y_g = \mathbb{R}$,

fg die Funktion $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$, falls $X_f = X_g$ und $Y_f = Y_g = \mathbb{R}$,

$f \circ g$ die Abbildung $x \mapsto f(g(x))$, falls $Y_g = X_f$,

f^n die Abbildung $f \circ \dots \circ f$ für $n \in \mathbb{N}_0$, falls $X_f = Y_f$,

f^{-n} das Urbild unter der Abbildung f^n für $n \in \mathbb{N}$, falls $X_f = Y_f$,

$f(\cdot)^\alpha$ die Funktion $x \mapsto (f(x))^\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$, falls $Y_f = \mathbb{R}$. Für $(f(x))^\alpha$ wird dabei kürzer auch $f(x)^\alpha$ geschrieben. Falls aus dem Kontext eindeutig $\alpha \notin \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ hervorgeht, dann wird für $f(\cdot)^\alpha$ kürzer f^α geschrieben.

$f \leq g$ für zwei Funktionen mit $X_f = X_g$ und $Y_f = Y_g = \mathbb{R}$ bedeutet $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in X_f$.

Kapitel 1

Grundlagen

In diesem Kapitel werden die in der weiteren Arbeit benötigten Hilfsmittel zusammengestellt. Neben Elementen der multilinearen Algebra, der Riemannschen Geometrie, der Maß- und Integrationstheorie, der Theorie dynamischer Systeme und der hyperbolischen Systeme werden Ergebnisse zur Dimensionsabschätzung zitiert, die im Rahmen dieser Arbeit verallgemeinert werden.

1.1 Multilineare Algebra

In diesem Abschnitt sollen, in Anlehnung an [1, 40, 43], einige wichtige Begriffe der Tensoralgebra in Erinnerung gebracht werden.

Es sei V ein n -dimensionaler Vektorraum über \mathbb{R} . Dann bezeichne V^* den Dualraum zu V , also den Raum der linearen Funktionalen (Linearformen) über V . Ein *Tensor der kontravarianten Ordnung k und der kovarianten Ordnung h* (auch kurz vom Typ (k, h)) ist eine Multilinearform $a : V^* \times \dots \times V^* \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ (mit dem k -fachen Produkt von V^* und dem h -fachen Produkt von V). Den Raum aller Tensoren vom Typ (k, h) auf V bezeichnen wir mit $T_h^k(V)$.

Ein Tensor $a \in T_h^0(V)$ heißt *symmetrisch*, falls $a(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(h)}) = a(\xi_1, \dots, \xi_h)$, und *antisymmetrisch*, falls $a(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(h)}) = \text{sign}(\sigma)a(\xi_1, \dots, \xi_h)$ für alle Permutationen $\sigma \in \Sigma_h$ und beliebige $\xi_1, \dots, \xi_h \in V$ gilt. In analoger Weise ist die Symmetrie und Antisymmetrie eines Tensors vom Typ $(k, 0)$ erklärt. Ein antisymmetrischer Tensor vom Typ $(0, h)$ heißt auch *h -Form* auf V . Der Raum aller h -Formen auf V sei mit $\Lambda^h V^*$ bezeichnet. Eine Abbildung $b : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}_{0+}$ (mit dem h -fachen Produkt von V), die als Betrag einer h -Form geschrieben werden kann, heißt *absolute h -Form*. Eine absolute n -Form wird auch als *Dichte* bezeichnet (siehe z. B. [40]). Die Menge aller absoluten h -Formen auf V sei mit $|\Lambda|^h V^*$ bezeichnet.

Es seien nun V und W zwei n -dimensionale Vektorräume und $L : V \rightarrow W$ eine

lineare Abbildung. Dann ist das *Pullback* L^*a eines Tensors $a \in T_h^0(V)$ ein Element aus $T_h^0(W)$, das durch

$$L^*a(\xi_1, \dots, \xi_h) := a(L\xi_1, \dots, L\xi_h)$$

für alle $\xi_1, \dots, \xi_h \in V$ definiert ist. In analoger Weise ist das Pullback einer absoluten h -Form erklärt. Die Abbildung $L^* : T_h^0(V) \rightarrow T_h^0(W)$ ist linear.

Wir betrachten nun den Spezialfall $V = W$ und $h = n$. Der Raum $\Lambda^n V^*$ ist eindimensional. Die dadurch eindeutig bestimmte Konstante $\det L$ mit der Eigenschaft

$$L^*a = (\det L)a$$

für alle $a \in \Lambda^n V^*$ heißt *Determinante* von L . Betrachten wir anstelle der n -Formen absolute n -Formen, erhalten wir die Konstante $|\det L|$.

1.2 Singulärwertfunktion einer Abbildung

Es seien E und E' zwei n -dimensionale Euklidische Räume mit den Skalarprodukten $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E'}$, und es sei $L : E \rightarrow E'$ ein linearer Operator. Dann bezeichne L^* den zu L adjungierten Operator, d. h. den eindeutig bestimmten linearen Operator $L^* : E' \rightarrow E$ mit $\langle Lx, y \rangle_{E'} = \langle x, L^*y \rangle_E$ für alle $x \in E, y \in E'$. Die *Singulärwerte* von L sind die Eigenwerte des positiv semi-definiten Operators $\sqrt{L^*L} : E \rightarrow E$. Sie werden mit $\alpha_1(L) \geq \dots \geq \alpha_n(L) \geq 0$ bezeichnet, wobei jeder Eigenwert entsprechend seiner Vielfachheit gezählt wird. Für $d \in [0, n]$ ist die *Singulärwertfunktion der Ordnung d* von L durch

$$\omega_d(L) := \begin{cases} 1 & \text{für } d = 0, \\ \alpha_1(L) \cdot \dots \cdot \alpha_{\lfloor d \rfloor}(L) \alpha_{\lfloor d \rfloor + 1}(L)^{d - \lfloor d \rfloor} & \text{für } d \in (0, n] \end{cases}$$

definiert. Für $E = E'$ stimmt der Wert $\omega_n(L)$ mit dem in Abschnitt 1.1 definierten Ausdruck $|\det L|$ überein. Wir wollen die Bezeichnung $|\det L|$ deshalb im weiteren auch für lineare Abbildungen zwischen zwei verschiedenen Euklidischen Räumen nutzen, da die Singulärwertfunktion $\omega_n(L)$ auch für eine solche Situation definiert ist.

Es bezeichne $B(u, r) := \{v \in E \mid \varrho(u, v) < r\}$ zu einem Punkt $u \in E$ und einer Zahl $r \in \mathbb{R}_+$ die offene Kugel um u mit Radius r , wobei ϱ die Euklidische Metrik ist. Diese Bezeichnung wollen wir im weiteren auch für allgemeine metrische Räume verwenden.

Nun sei u_1, \dots, u_n eine orthonormale Basis in E , so daß u_i ein Eigenvektor von $\sqrt{L^*L}$ zum Eigenwert $\alpha_i(L)$ ist ($i = 1, \dots, n$). Dann existiert in E' eine Orthonormalbasis v_1, \dots, v_n mit $v_i = \frac{1}{\alpha_i} L u_i$ für jedes $i = 1, \dots, n$ mit $\alpha_i \neq 0$. Das Bild der Einheitskugel

$B(0,1) \subset E$ unter der Abbildung L ist die Menge

$$\left\{ \sum_{1 \leq i \leq n: \alpha_i(L) \neq 0} a_i v_i \in E' \mid \sum_{1 \leq i \leq n: \alpha_i(L) \neq 0} \left(\frac{a_i}{\alpha_i(L)} \right)^2 < 1 \right\},$$

also ein Ellipsoid in E' mit den Halbachsenlängen $\alpha_1(L), \dots, \alpha_n(L)$. Deshalb wird das Konzept der Singulärwertfunktion auf Ellipsoide ausgedehnt. Es sei \mathcal{E} ein Ellipsoid in einem n -dimensionalen Euklidischen Raum E , und $\alpha_1(\mathcal{E}) \geq \dots \geq \alpha_n(\mathcal{E}) \geq 0$ bezeichne die Längen der Halbachsen, d. h., es existiert eine orthonormale Basis u_1, \dots, u_n in E , so daß $\mathcal{E} = \{ \sum_{1 \leq i \leq n: \alpha_i(\mathcal{E}) \neq 0} a_i u_i \in E \mid \sum_{1 \leq i \leq n: \alpha_i(\mathcal{E}) \neq 0} \left(\frac{a_i}{\alpha_i(\mathcal{E})} \right)^2 < 1 \}$ gilt. Dann definieren wir

$$\omega_d(\mathcal{E}) := \begin{cases} 1 & \text{für } d = 0, \\ \alpha_1(\mathcal{E}) \cdot \dots \cdot \alpha_{\lfloor d \rfloor}(\mathcal{E}) \alpha_{\lfloor d \rfloor}(\mathcal{E})^{d - \lfloor d \rfloor} & \text{für } d \in (0, n]. \end{cases}$$

Die Funktion ω_d hat einige interessante Eigenschaften, die wir aus [9, 18] zitieren. Die erste Aussage geht dabei auf [45, 56] zurück und wird auch als verallgemeinerte Hornsche Ungleichung bezeichnet.

Lemma 1.2.1 *Es seien E, E' und E'' drei n -dimensionale Euklidische Räume und $L : E \rightarrow E'$ und $L' : E' \rightarrow E''$ zwei lineare Abbildungen. Dann gilt für alle $d \in [0, n]$ die Beziehung*

$$\omega_d(L' \circ L) \leq \omega_d(L) \cdot \omega_d(L'),$$

d. h., ω_d ist eine submultiplikative Funktion für jedes $d \in [0, n]$.

Lemma 1.2.2 *Es seien E ein n -dimensionaler Euklidischer Raum und $k > 0, m > 0, \eta > 0$ und $d \in (0, n]$ Zahlen, die der Ungleichung $k \leq m^d$ genügen. Weiterhin sei $\mathcal{E} \subset E$ ein Ellipsoid mit $\alpha_1(\mathcal{E}) \leq m$ und $\omega_d(\mathcal{E}) \leq k$. Dann ist $\mathcal{E} + B(O, \eta)$ in einem Ellipsoid $\mathcal{E}' \subset E$ enthalten, und es gilt*

$$\omega_d(\mathcal{E}') \leq \left[1 + \left(\frac{m^{\lfloor d \rfloor}}{k} \right)^{1/(d - \lfloor d \rfloor)} \eta \right]^d k.$$

Die folgende Aussage zeigt, wie für ein Ellipsoid \mathcal{E} die Anzahl der zur Überdeckung höchstens benötigten Kugeln von konstantem Radius $r > 0$ durch die Singulärwertfunktion abgeschätzt werden kann (siehe [18, 33]):

Lemma 1.2.3 *Es seien E ein n -dimensionaler Euklidischer Raum, $\mathcal{E} \subset E$ ein Ellipsoid und $r > 0$ eine Zahl. Dann kann \mathcal{E} schon durch $\left\lfloor \frac{2^l \omega_l(\mathcal{E})}{r^l} \right\rfloor$ Kugeln vom Radius $r\sqrt{l+1}$ überdeckt werden, wobei l durch*

$$l := \begin{cases} 0 & \text{für } r > \alpha_1(\mathcal{E}), \\ m & \text{für } \alpha_{m+1}(\mathcal{E}) \leq r \leq \alpha_m(\mathcal{E}), m \in \{1, \dots, n-1\}, \\ n & \text{für } r \leq \alpha_n(\mathcal{E}) \end{cases}$$

festgelegt ist.

Im weiteren sind in der Regel die betrachteten linearen Abbildungen Ableitungen von C^1 -Abbildungen φ auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten (M, g) , die entsprechenden Euklidischen Räume sind also jeweils Tangentialräume. In Punkten $u \in M$ mit $|\det(d_u \varphi)| > 0$ ist die Abbildung φ lokal invertierbar, und die Singulärwerte der Ableitung $d_{\varphi(u)} \varphi^{-1}$ der lokalen Umkehrfunktion sind die Reziproken der Singulärwerte von $d_u \varphi$. Deshalb ist es sinnvoll, eine inverse Singulärwertfunktion einzuführen.

Es seien E und E' zwei n -dimensionale Euklidische Räume mit den Skalarprodukten $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E'}$, und $L : E \rightarrow E'$ sei ein linearer Operator mit $|\det L| > 0$, d. h., L ist invertierbar. Für beliebiges $d \in [0, n]$ ist die *inverse Singulärwertfunktion der Ordnung d* von L durch

$$\overline{\omega}_d(L) := \begin{cases} 1 & \text{für } d = 0, \\ \alpha_n(L) \cdot \dots \cdot \alpha_{n-\lfloor d \rfloor + 1}(L) \alpha_{n-\lfloor d \rfloor}(L)^{d-\lfloor d \rfloor} & \text{für } d \in (0, n] \end{cases}$$

definiert. Diese Funktion entspricht der Inversen der Singulärwertfunktion der Umkehrabbildung, d. h., es ist $\overline{\omega}_d(L) = \frac{1}{\omega_d(L^{-1})}$. Damit gilt, analog zu Lemma 1.2.1, die folgende Aussage:

Lemma 1.2.4 *Es seien E , E' und E'' drei n -dimensionale Euklidische Räume und $L : E \rightarrow E'$ und $L' : E' \rightarrow E''$ zwei invertierbare lineare Abbildungen. Dann gilt für alle $d \in [0, n]$ die Beziehung*

$$\overline{\omega}_d(L' \circ L) \geq \overline{\omega}_d(L) \cdot \overline{\omega}_d(L').$$

1.3 Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Da in dieser Arbeit C^1 -Abbildungen auf glatten Riemannschen Mannigfaltigkeiten betrachtet werden, soll auf die wichtigsten Elemente der Riemannschen Geometrie kurz

eingegangen werden. Riemannsche Mannigfaltigkeiten können allgemein über beliebigen Hilbert- oder Banachräumen erklärt werden. Wir beschränken uns im weiteren aber auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten über dem \mathbb{R}^n . Alle in diesem Abschnitt aufgeführten Begriffe sind [27, 34, 67] entnommen.

Es seien M eine beliebige nichtleere Menge und $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Eine n -dimensionale *Karte* für M ist eine Bijektion $x : D(x) \rightarrow R(x) \subset \mathbb{R}^n$, wobei $R(x)$ offen in \mathbb{R}^n ist und $D(x)$ eine Teilmenge von M ist. Ein n -dimensionaler *Atlas der Klasse C^r* ($r \in \mathbb{N}$) von M ist eine Familie \mathcal{A} von n -dimensionalen Karten mit den folgenden Eigenschaften:

$$(A1) \quad \bigcup_{x \in \mathcal{A}} D(x) = M.$$

(A2) Für alle $x, y \in \mathcal{A}$ ist die Menge $x(D(x) \cap D(y))$ offen in \mathbb{R}^n .

(A3) Für alle $x, y \in \mathcal{A}$ ist die Abbildung $y \circ x^{-1} : x(D(x) \cap D(y)) \rightarrow y(D(x) \cap D(y))$ ein C^r -Diffeomorphismus.

Eine beliebige n -dimensionale Karte x von M heißt *C^r -verträglich* ($r \in \mathbb{N}$) mit dem n -dimensionalen C^r -Atlas \mathcal{A} von M , wenn $\mathcal{A} \cup \{x\}$ auch ein n -dimensionaler C^r -Atlas von M ist. Ein n -dimensionaler Atlas der Klasse C^r heißt *maximal*, wenn jede mit \mathcal{A} C^r -verträgliche Karte zu \mathcal{A} gehört. Es seien M eine beliebige Menge und \mathcal{A}_{\max} ein zugehöriger maximaler Atlas der Klasse C^r ($r \in \mathbb{N}$). Das Paar (M, \mathcal{A}_{\max}) heißt dann *n -dimensionale C^r -Mannigfaltigkeit*.

Für jede n -dimensionale C^r -Mannigfaltigkeit (M, \mathcal{A}_{\max}) bildet das Mengensystem $\{D(x)\}_{x \in \mathcal{A}_{\max}}$ die Basis für eine Topologie, die *kanonische Topologie* der Mannigfaltigkeit heißt. Ein topologischer Raum heißt *hausdorffsch*, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten stets disjunkte Umgebungen derselben gibt. Im weiteren seien alle betrachteten Mannigfaltigkeiten hausdorffsch. Für die Mannigfaltigkeit (M, \mathcal{A}_{\max}) wird im weiteren kurz M geschrieben.

Es seien M und N zwei C^r -Mannigfaltigkeiten ($r \in \mathbb{N}$) der Dimensionen n bzw. m , und $s \leq r$ sei eine beliebige natürliche Zahl. Die Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt *C^s -differenzierbar*, wenn für jede Karte x von M und jede Karte y von N die Abbildung

$$y \circ f \circ x^{-1} : x(D(x) \cap f^{-1}(D(y))) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

eine C^s -Abbildung ist. Die Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt *C^s -Diffeomorphismus*, wenn f bijektiv ist und f und f^{-1} jeweils C^s -differenzierbar sind.

Für eine n -dimensionale C^r -Mannigfaltigkeit M ($r \in \mathbb{N}$) und einen beliebigen Punkt $u \in M$ definiert

$$(u, x, \xi) \sim (u, y, \eta) \Leftrightarrow \eta = (y \circ x^{-1})'(x(u))\xi$$

eine Äquivalenzrelation, wobei x und y beliebige Karten um u und $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ beliebige Vektoren sind. Die so definierte Äquivalenzklasse $[u, x, \xi] := [(u, x, \xi)]$ heißt *Tangentenvektor* in u . Es seien $u \in M$ ein beliebiger Punkt und x eine beliebige Karte um

u . Dann ist der *Tangentialraum* $T_u M$ an M in u die Menge aller Tangentialvektoren $\{[u, x, \xi]\}$, versehen mit der linearen Struktur

$$[u, x, \xi] + [u, x, \eta] := [u, x, \xi + \eta] \quad \text{für alle } \xi, \eta \in \mathbb{R}^n,$$

$$\alpha[u, x, \xi] := [u, x, \alpha\xi] \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ und alle } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Man kann zeigen, daß diese Definition korrekt, d. h. unabhängig von der Wahl der Karte x ist. Es seien e_1, \dots, e_n die Standard-Basis des \mathbb{R}^n . Dann ist für einen Punkt $u \in M$ und eine Karte x um u

$$\partial_{1,x}(u) := [u, x, e_1], \dots, \partial_{n,x}(u) := [u, x, e_n]$$

eine Basis in $T_u M$, die als *mobile Basis* bezeichnet wird.

Die Vereinigung $TM := \bigcup_{u \in M} T_u M$ heißt *Tangentialbündel* von M . Der Zusammenhang zwischen TM und M ist durch die kanonische Projektion

$$\pi : TM \rightarrow M, [u, x, \xi] \mapsto u$$

gegeben. Ist M eine n -dimensionale C^r -Mannigfaltigkeit ($r \geq 2$), so hat TM die kanonische Struktur einer $2n$ -dimensionalen C^{r-1} -Mannigfaltigkeit.

Für zwei C^r -Mannigfaltigkeiten M und N der Dimensionen n bzw. m und eine C^s -Abbildung $f : M \rightarrow N$ ($1 \leq s \leq r$) ist das *Differential* von f die Abbildung $df : TM \rightarrow TN$, die durch

$$df([u, x, \xi]) := [f(u), y, (y \circ f \circ x^{-1})'(x(u))\xi]$$

für beliebiges $u \in M$, beliebige Karten x und y um u bzw. $f(u)$ und beliebiges $\xi \in \mathbb{R}^n$ definiert ist. Die lineare Abbildung $d_u f : T_u M \rightarrow T_{f(u)} N$ mit $d_u f := df|_{T_u M}$ heißt *Tangentialabbildung* von f in u .

Es sei $I = (a, b)$, mit zwei reellen Zahlen $a < b$, ein offenes Intervall und M eine n -dimensionale Riemannsche C^r -Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung $\alpha : I \rightarrow M$ heißt *C^s -Kurve*, wenn α eine C^s -Abbildung ist ($1 \leq s \leq r$). Für eine C^s -Kurve $\alpha : I \rightarrow M$ ist

$$\dot{\alpha}(t) := [\alpha(t), x, (x \circ \alpha)'(t)]$$

der *Geschwindigkeitsvektor* an α zur Zeit $t \in I$, wobei x eine beliebige Karte um $\alpha(t)$ ist. Im weiteren sei mit I immer ein offenes Intervall in \mathbb{R} bezeichnet.

Auf der n -dimensionalen C^r -Mannigfaltigkeit M ($r \in \mathbb{N}$) ist eine *Riemannsche Metrik* g der Klasse C^{r-1} gegeben, wenn g jedem Punkt $u \in M$ und jeder Karte x um u eine symmetrische positiv definite Matrix $G_x(u) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ zuordnet, so daß die

Abbildung $G_x(\cdot) : D(x) \rightarrow M_{n,n}(\mathbb{R})$ eine C^{r-1} -Abbildung ist und für zwei beliebige Karten x und y um u die Beziehung

$$(y \circ x^{-1})'(x(u))^T G_y(u) (y \circ x^{-1})'(x(u)) = G_x(u)$$

gilt. Eine *Riemannsche Mannigfaltigkeit* (M, g) der Klasse C^r ist eine zusammenhängende C^r -Mannigfaltigkeit M , versehen mit einer Riemannschen Metrik g der Klasse C^{r-1} .

Ein C^s -Tensorfeld vom Typ (k, h) auf der C^r -Mannigfaltigkeit M ($s \leq r$, $r \geq 2$) ist eine C^s -Abbildung $T : M \rightarrow \bigcup_{u \in M} T_h^k T_u M$, für die $\pi_h^k \circ T = \text{id}_M$ gilt, wobei $\pi_h^k : \bigcup_{u \in M} T_h^k T_u M \rightarrow M$ die kanonische Projektion bezeichne und $\bigcup_{u \in M} T_h^k T_u M$ als n^{1+k+h} -dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse C^{r-1} interpretiert wird. Eine Riemannsche Metrik der Klasse C^{r-1} ist also ein symmetrisches C^{r-1} -Tensorfeld vom Typ $(0, 2)$.

Es sei x eine beliebige Karte um $u \in M$. Dann wird das *Skalarprodukt* in $T_u M$ durch

$$\langle [u, x, \xi], [u, x, \eta] \rangle_{T_u M} := \langle G_x(u) \xi, \eta \rangle_{\mathbb{R}^n} \quad (\xi, \eta \in \mathbb{R}^n)$$

definiert. Die *Norm* eines Vektors aus $T_u M$ ist durch

$$\| [u, x, \xi] \|_{T_u M} := \sqrt{\langle [u, x, \xi], [u, x, \xi] \rangle_{T_u M}}$$

gegeben. Im weiteren werden wir für diese Norm kürzer $\|v\|$ schreiben, wenn aus dem Kontext eindeutig hervorgeht, daß v ein Vektor aus dem Tangentialraum $T_u M$ ist.

Es sei $\alpha : (a, b) \rightarrow M$ eine C^1 -Kurve. Die *Länge* von α ist

$$l(\alpha) := \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\|_{T_{\alpha(t)} M} dt.$$

Eine *stückweise C^1 -Kurve* auf M ist eine stetige Abbildung $\alpha : (a, b) \rightarrow M$, für die eine endliche Anzahl von Punkten $a = t_1 < t_2 < \dots < t_m = b$ existiert, so daß $\alpha|_{(t_i, t_{i+1})}$ eine C^1 -Kurve für alle $i = 1, \dots, m-1$ ist. Die *Länge* dieser stückweisen C^1 -Kurve ist

$$l(\alpha) := \sum_{i=1}^{m-1} l(\alpha|_{(t_i, t_{i+1})}).$$

Es bezeichne C_u^v die Menge aller stückweisen C^1 -Kurven auf M von u nach v . Der *geodätische Abstand* auf M ist eine Funktion $\varrho : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$\varrho(u, v) := \inf_{\alpha \in C_u^v} l(\alpha)$$

für alle $u, v \in M$. Der geodätische Abstand ist eine Metrik auf M . Die durch sie erzeugte metrische Topologie stimmt mit der kanonischen Topologie von M überein.

Eine C^s -Abbildung $F : M \rightarrow TM$ mit $\pi \circ F = \text{id}_M$ heißt C^s -Vektorfeld auf der C^r -Mannigfaltigkeit M ($s < r \leq 2$). Ein C^s -Vektorfeld ist also ein C^s -Tensorfeld vom Typ $(0, 1)$. Eine C^1 -Kurve $c : I \rightarrow M$ mit $\tau \in I$ heißt *Integralkurve* des Vektorfeldes F mit Anfang $u \in M$ zur Zeit $t = \tau$, falls sie Lösung des *Cauchy-Problems*

$$\dot{c}(t) = F(c(t)), \quad c(\tau) = u \quad (1.3.1)$$

ist. Das Cauchy-Problem (1.3.1) heißt *lokal eindeutig lösbar*, falls für beliebige zwei Lösungen c_1 und c_2 von (1.3.1) die Beziehung $c_1(t) = c_2(t)$ für eine hinreichend kleine Umgebung von τ gilt. Unter bestimmten Voraussetzungen an das Vektorfeld ist die Existenz und Eindeutigkeit von Integralkurven gesichert (siehe [1, 52]):

Satz 1.3.1 *Es seien M eine n -dimensionale C^r -Mannigfaltigkeit ($r \geq 2$) und $F : M \rightarrow TM$ ein C^s -Vektorfeld ($1 \leq s < r$). Dann ist für jedes $u \in M$ das Cauchy-Problem (1.3.1) lokal eindeutig lösbar.*

Wir bezeichnen eine Lösung des Cauchy-Problems (1.3.1) mit Anfang $u \in M$ für $t = 0$ mit $\varphi(\cdot, u)$ und schreiben $\varphi^t(u) := \varphi(t, u)$ für beliebiges $t \in \mathbb{R}$, für das die Lösung existiert.

Satz 1.3.2 *Es seien M eine n -dimensionale C^r -Mannigfaltigkeit ($r \geq 2$) und $F : M \rightarrow TM$ ein C^s -Vektorfeld ($1 \leq s < r$). Dann existieren für jedes $u \in M$ und jedes $\tau \in \mathbb{R}$ eine offene Umgebung $U \subset M$ von u , ein $\varepsilon > 0$ und eine C^s -Abbildung $\varphi : (\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon) \times U \rightarrow M$ mit den folgenden Eigenschaften:*

- (1) *Die Abbildung $\varphi(\cdot, u)$ ist auf $(\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon)$ von der Glattheit C^{s+1} .*
- (2) *Die Abbildung $\varphi(\cdot, u)$ ist Lösung des Cauchy-Problems mit Anfang u zur Zeit $t = \tau$:*

$$\dot{c}(t) = F(c(t)), \quad c(\tau) = u. \quad (1.3.2)$$

- (3) *Das Cauchy-Problem (1.3.2) ist lokal eindeutig lösbar.*

Außerdem stimmen beliebige zwei Integralkurven $c_1 : I_1 \rightarrow M$ und $c_2 : I_2 \rightarrow M$ von F mit $\tau \in I_1 \cap I_2$ und $c_1(\tau) = c_2(\tau)$ für alle $t \in I_1 \cap I_2$ überein.

Für die von F erzeugte Differentialgleichung

$$\dot{u} = F(u) \quad (1.3.3)$$

kann man mit Satz 1.3.2 zeigen, daß für jedes $u \in M$ die maximale Integralkurve $\varphi^{(\cdot)}(u) : I(u) \rightarrow M$ von (1.3.3) mit Anfang u zur Zeit $t = 0$ und mit dem maximalen

Zeitintervall $I(u) := \bigcup I_c$ existiert, wobei $c : I_c \rightarrow M$ alle möglichen Integralkurven von (1.3.3) durch u sind und $\varphi^{(\cdot)}(u)|_{I_c} = c$ ist.

Ein *lokaler C^s -Fluß* auf M ($0 \leq s < r$) ist eine C^s -Abbildung $\varphi : U \rightarrow M$, $(t, u) \mapsto \varphi^t(u)$, wobei U eine offene Umgebung von $\{0\} \times M$ in $\mathbb{R} \times M$ ist, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(LF1) Für alle $u \in M$ ist $\mathbb{R} \times \{u\} \cap U$ zusammenhängend.

(LF2) Es gilt $\varphi^0 = \text{id}_M$.

(LF3) Es gilt $\varphi^{t_1+t_2}(u) = \varphi^{t_1}(\varphi^{t_2}(u))$, falls $(t_2, u), (t_1 + t_2, u), (t_1, \varphi^{t_2}(u)) \in U$.

Ist $U = \mathbb{R} \times M$, so heißt $\varphi : U \rightarrow M$ *globaler C^s -Fluß*. Ein globaler C^s -Fluß ist also eine einparametrische Gruppe von C^s -Diffeomorphismen auf M .

Anhand von Satz 1.3.2 läßt sich zeigen, daß jedem C^s -Vektorfeld $F : M \rightarrow TM$ ($1 \leq s < r$) durch die maximalen Integralkurven eindeutig ein maximaler C^s -Fluß zugeordnet ist, der jedoch nicht global sein muß. Das Vektorfeld F heißt *vollständig*, falls der zugehörige maximale Fluß ein globaler Fluß ist. Die folgende Aussage aus [10] zeigt, daß ein gegebenes C^s -Vektorfeld durch geeignete Skalierung stets in ein vollständiges Vektorfeld überführt werden kann, d. h., man kann sich auf die Betrachtung von globalen Flüssen beschränken.

Satz 1.3.3 *Ist $F : M \rightarrow TM$ ein C^s -Vektorfeld auf der n -dimensionalen C^r -Mannigfaltigkeit M ($1 \leq s < r$), so existiert eine C^{s-1} -Funktion $p : M \rightarrow \mathbb{R}_+$, für die pF ein vollständiges Vektorfeld auf M ist.*

Die Vektorfelder F und pF haben dabei die gleichen Bilder der Integralkurven, sind aber unter Umständen unterschiedlich parametrisiert.

Nun seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^r -Mannigfaltigkeit ($r \geq 3$), $u \in M$ ein Punkt und x eine Karte um u . Die durch den Metriktensor definierten Matrizen $G_x(u)$ und $G_x(u)^{-1}$ seien in der Form $G_x(u) = (g_{ij}(u))_{i,j=1}^n$ und $G_x(u)^{-1} = (g^{jk}(u))_{j,k=1}^n$ dargestellt. Dann heißen die n^3 Funktionen $\Gamma_{ij}^k : D(x) \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$\Gamma_{ij}^k(u) := \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n g^{ks}(u) \left[-\frac{\partial(g_{ij} \circ x^{-1})}{\partial x^s}(x(u)) + \frac{\partial(g_{js} \circ x^{-1})}{\partial x^i}(x(u)) + \frac{\partial(g_{si} \circ x^{-1})}{\partial x^j}(x(u)) \right]$$

($i, j, k = 1, \dots, n$), *Christoffel-Symbole 2. Art* in der Karte x . Da diese Symbole Ableitungen der Riemannschen Metrik enthalten und die Metrik von der Klasse C^{r-1} war, sind die Christoffel-Symbole nur noch von der Glattheit C^{r-2} .

Ein C^s -Vektorfeld auf M hat für einen Punkt $u \in M$ und eine Karte x um u in der mobilen Basis des Tangentialraumes die Darstellung $F(u) = \sum_{i=1}^n f^i(x(u)) \partial_{i,x}(u)$.

Für $v \in T_u M$ in der Form $v = \sum_{i=1}^n a^i \partial_{i,x}(u)$ ist

$$\nabla_v F(u) := \sum_{k=1}^n \left[\sum_{i=1}^n \left(a^i \frac{\partial f^k}{\partial x^i}(u) + a^i \sum_{j=1}^n f^j(u) \Gamma_{ij}^k(u) \right) \right] \partial_{k,x}(u)$$

die *kovariante Ableitung* des Vektorfeldes F in Richtung des Vektors v .

Für eine C^1 -Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ heißt eine Abbildung $F : I \rightarrow TM$ mit $F(t) \in T_{\gamma(t)}M$ für alle $t \in I$ *Vektorfeld längs γ* . Das Vektorfeld $F : I \rightarrow TM$ heißt *parallel längs γ* , falls $\nabla_{\dot{\gamma}(t)} F(t) = 0$ für alle $t \in I$ gilt. Ist $\gamma : I \rightarrow M$ eine C^1 -Kurve und $v \in T_{\gamma(t_0)}M$ ($t_0 \in I$), dann gibt es genau ein Vektorfeld $F_v(T)$ längs γ , das parallel längs γ ist und für das $F_v(t_0) = v$ gilt. Für $t_1 > t_0$ ($t_0, t_1 \in I$) heißt die Abbildung

$$\tau_{\gamma(t_0)}^{\gamma(t_1)} : T_{\gamma(t_0)}M \rightarrow T_{\gamma(t_1)}M,$$

die jedem $v \in T_{\gamma(t_0)}M$ den Vektor $F_v(t_1)$ zuordnet, *Parallelverschiebung* oder *Paralleltransport entlang γ* aus $\gamma(t_0)$ in $\gamma(t_1)$. Diese Abbildung ist eine Isometrie zwischen den Tangentialräumen $T_{\gamma(t_0)}$ und $T_{\gamma(t_1)}$.

Eine C^1 -Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ heißt *Geodätische*, falls das tangentielle Vektorfeld $\dot{\gamma}(t)$ parallel längs γ ist, d. h., falls $\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t) = 0$ für alle $t \in I$ gilt. Für $v \in TM$ bezeichne γ_v die maximale Geodätische mit Anfang $\gamma_v(0) = \pi(v)$ und $\dot{\gamma}_v(0) = v \in T_{\pi(v)}M$. Lokal ist eine Geodätische γ_v Lösung des Differentialgleichungssystems zweiter Ordnung

$$\ddot{x}^k + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = 0 \quad (k = 1, \dots, n).$$

Daraus folgt $\|\dot{\gamma}_v\| = \|v\|$, also sind die Geodätischen Kurven konstanter Geschwindigkeit.

Die Menge $\Omega \subset TM$ sei die Menge aller Vektoren v , für die $\gamma_v(1)$ erklärt ist. Die *Exponentialabbildung* $\exp : \Omega \rightarrow M$ ist durch $\exp(v) := \gamma_v(1)$ für alle $v \in \Omega$ definiert. Es bezeichne $\exp_u := \exp|_{T_u M \cap \Omega}$ für alle $u \in M$ die Einschränkung der Exponentialabbildung auf den Tangentialraum $T_u M$. Da in die Differentialgleichung zur Definition der Exponentialabbildung die Christoffel-Symbole eingehen, ist die Glattheit von \exp nur noch C^{r-2} . Für Riemannsche C^r -Mannigfaltigkeiten (M, g) mit $r \geq 3$ gelten für alle $u \in M$ die folgenden beiden Aussagen:

- (E1) Es existiert ein $\delta > 0$, so daß \exp_u ein C^{r-2} -Diffeomorphismus von $B(O_u, \delta)$ auf $B(u, \delta)$ ist und $\varrho(\exp_u v, u) = \|v\|$ für alle $v \in B(O_u, \delta)$ gilt.
(Dabei ist $B(O_u, \delta)$ eine Kugel im Tangentialraum $T_u M$ und $B(u, \delta)$ eine Kugel in der Mannigfaltigkeit M .)
- (E2) Die Ableitung der Abbildung \exp_u im Ursprung O_u des Tangentialraumes $T_u M$ stimmt mit der identischen Abbildung $\text{id}_{T_u M}$ auf $T_u M$ überein.

Mit der Exponentialabbildung kann man eine zur Taylor-Formel in \mathbb{R}^n analoge Aussage zeigen (siehe [57]), die im weiteren auch als Taylor-Formel bezeichnet wird:

Satz 1.3.4 *Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^3 -Mannigfaltigkeit, $\varphi : M \rightarrow M$ eine C^1 -Abbildung und $K \subset M$ eine kompakte Menge. Dann existiert ein $\varepsilon_0 > 0$, so daß für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, alle $u \in K$ und alle $v \in B(u, \varepsilon)$ die folgende Ungleichung gilt:*

$$\begin{aligned} & \|\exp_{\varphi(u)}^{-1}(\varphi(v)) - d_u\varphi(\exp^{-1}(v))\|_{T_{\varphi(u)}M} \leq \\ & \sup_{w \in B(u, \varepsilon)} \|\tau_{\varphi(w)}^{\varphi(u)} \circ d_w\varphi \circ \tau_u^w - d_u\varphi\| \cdot \|\exp_u^{-1}(v)\|_{T_uM}. \end{aligned}$$

Dabei ist mit $\|\tau_{\varphi(w)}^{\varphi(u)} \circ d_w\varphi \circ \tau_u^w - d_u\varphi\|$ die Operatornorm des linearen Operators $\tau_{\varphi(w)}^{\varphi(u)} \circ d_w\varphi \circ \tau_u^w - d_u\varphi : T_uM \rightarrow T_{\varphi(u)}M$ gemeint.

Für eine Riemannsche C^r -Mannigfaltigkeit M ($r \geq 2$) wird durch den Riemannschen Metriktensor g ein C^{r-2} -Tensorfeld R vom Typ $(0, 3)$ erzeugt, das für beliebige C^2 -Vektorfelder $F, G, H : M \rightarrow TM$ durch

$$R(F, G)H := \nabla_F \nabla_G H - \nabla_G \nabla_F H - \nabla_{[F, G]} H$$

definiert ist und *Krümmungstensorfeld* heißt. Dabei bezeichnet $[F, G] := \nabla_F G - \nabla_G F$ die Lie-Klammer. Für beliebige Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in T_uM$ schreibt man auch $R_u(v_1, v_2)v_3 := R_u(F, G)H$, falls F, G, H beliebige Vektorfelder mit $F(u) = v_1, G(u) = v_2$ und $H(u) = v_3$ sind. Für einen Punkt $u \in M$ und zwei linear unabhängige Vektoren $v_1, v_2 \in T_uM$ ist die *Schnittkrümmung* in u bezüglich des durch das Paar (v_1, v_2) aufgespannten Unterraumes σ die Zahl

$$R(\sigma) := \frac{\langle R_u(v_2, v_1)v_1, v_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle \langle v_2, v_2 \rangle - \langle v_1, v_2 \rangle^2}.$$

Diese ist von der Wahl des linear unabhängigen Paares (v_1, v_2) aus σ unabhängig. Sind v_1 und v_2 sogar orthonormal, dann vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$R(\sigma) = \langle R_u(v_2, v_1)v_1, v_2 \rangle.$$

1.4 Elemente der Maß- und Integrationstheorie

In der vorliegenden Arbeit werden Dimensionsabschätzungen unter Ausnutzung von subadditiven Integralen beschrieben. Deshalb werden in diesem Abschnitt, in Anlehnung an [7, 19, 30, 35, 42, 71], einige grundlegende maßtheoretische Begriffe bereitgestellt.

Es sei X eine beliebige Menge. Dann bezeichnet $\mathcal{P}(X)$ die *Potenzmenge* von X , also das System aller Teilmengen von X . Eine Teilmenge \mathcal{A} von $\mathcal{P}(X)$ heißt σ -*Algebra*, wenn

- $X \in \mathcal{A}$,
- für alle $A \in \mathcal{A}$ auch $X \setminus A \in \mathcal{A}$ gilt,
- für jede Folge $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ von Mengen aus \mathcal{A} auch $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ gilt.

Ein wichtiges Beispiel ist die σ -Algebra $\mathcal{B}(X)$ der Borel-Mengen, die aus allen offenen Teilmengen von X erzeugt wird, d. h., sie enthält alle offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n und alle Mengen, die aus offenen Mengen durch Komplementbildung und abzählbare Vereinigung erzeugt werden können.

Eine Mengenfunktion $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{0+}$, definiert auf einer σ -Algebra von Teilmengen von X , heißt *Maß* auf X , falls

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- für jede Folge $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen aus \mathcal{A} die Beziehung $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ gilt (σ -Additivität).

Ein Tripel (X, \mathcal{A}, μ) , bestehend aus einer beliebigen Menge X , einer σ -Algebra \mathcal{A} aus Teilmengen von X und einem Maß $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{0+}$, heißt *Maßraum*. Die Mengen aus \mathcal{A} werden dann auch als *meßbare Mengen* bezeichnet. Eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *meßbar* bezüglich der σ -Algebra \mathcal{A} , wenn für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Menge aller Punkte $x \in X$ mit $f(x) < a$ in \mathcal{A} liegt. Ein Maß auf der σ -Algebra $\mathcal{B}(X)$ der Borel-Mengen heißt *Borel-Maß*.

Ein wichtiges Beispiel eines Maßes ist das Lebesgue-Maß μ_L in \mathbb{R}^n , das für Quader der Form $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ mit $a_i < b_i$ ($i = 1, \dots, n$) als $\mu_L([a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$ definiert ist und auf die σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ der Borel-Mengen fortgesetzt wird, so daß die Maßeigenschaften erfüllt sind.

Eine Mengenfunktion $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{0+}$ heißt *äußeres Maß* auf X , falls

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$ für $A_1 \subset A_2 \subset X$ gilt (Monotonie),
- für jede Folge $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ beliebiger Teilmengen von X die Beziehung $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ gilt (σ -Subadditivität).

Ein auf einem metrischen Raum (X, ϱ) definiertes äußeres Maß μ heißt *metrisches äußeres Maß*, falls zusätzlich $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$ für beliebige nichtleere Teilmengen A_1 und A_2 von X mit $\varrho(A_1, A_2) := \inf_{a_1 \in A_1, a_2 \in A_2} \varrho(a_1, a_2) > 0$ gilt.

Eine Menge $A \subset X$ heißt *meßbar bezüglich des äußeren Maßes μ* bzw. *μ -meßbar*, falls $\mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B)$ für beliebige Mengen $B \subset X$ ist. Offenbar bildet die Menge aller μ -meßbaren Mengen eine σ -Algebra \mathcal{A} und $\mu|_{\mathcal{A}}$ ist ein Maß. Ein *äußeres Borel-Maß* ist ein äußeres Maß, bezüglich dem alle Borel-Mengen meßbar sind. Man kann zeigen ([21]), daß jedes metrische äußere Maß ein äußeres Borel-Maß ist.

Ein Maß bzw. äußeres Maß μ auf X heißt *endlich*, wenn $\mu(X) < \infty$ gilt. Es sei A eine Teilmenge von X . Dann heißt das Maß bzw. äußere Maß μ *auf A konzentriert*, wenn $\mu(B) = 0$ für alle $B \in \mathcal{A}$ bzw. $B \in \mathcal{P}(X)$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt.

Ein *Integral* auf einem Maßraum (X, \mathcal{A}, μ) , definiert für eine Klasse \mathcal{F} von Funktionen $X \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $X \rightarrow \mathbb{R}_{0+}$, ist ein Funktional

$$\text{a) } I : \mathcal{A} \times \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \quad \text{oder}$$

$$\text{b) } I : \mathcal{A} \times \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{0+}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(I1) a) Für alle $A \in \mathcal{A}$, alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $I(A, \alpha f) = \alpha I(A, f)$, d. h., für alle $A \in \mathcal{A}$ ist $I(A, \cdot) : \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ homogen.

b) Für alle $A \in \mathcal{A}$, alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}_{0+}$ gilt $I(A, \alpha f) = \alpha I(A, f)$, d. h., für alle $A \in \mathcal{A}$ ist $I(A, \cdot) : \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ positiv homogen.

(I2) Für alle $A \in \mathcal{A}$ und alle $f, g \in \mathcal{F}$ mit $\{I(A, f), I(A, g)\} \neq \{-\infty, \infty\}$ gilt $I(A, f + g) = I(A, f) + I(A, g)$, d. h., für alle $A \in \mathcal{A}$ ist $I(A, \cdot)$ additiv.

(I3) Für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle Folgen $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ paarweise disjunkter Mengen mit $\{-\infty, \infty\} \not\subset \{I(A_i, f)\}_{i \in \mathbb{N}}$ gilt $I(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, f) = \sum_{i=1}^{\infty} I(A_i, f)$, d. h., für alle $f \in \mathcal{F}$ ist $I(\cdot, f)$ σ -additiv.

(I4) Für alle $A \in \mathcal{A}$ und alle $f, g \in \mathcal{F}$ mit $f \leq g$ gilt $I(A, f) \leq I(A, g)$, d. h., für alle $A \in \mathcal{A}$ ist $I(A, \cdot)$ monoton.

(I5) Für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt $I(A, \chi_A) = \mu(A)$, wobei χ_A die charakteristische Funktion der Menge A bezeichne.

Dabei ist für den entsprechenden Integralbegriff die Funktionenklasse \mathcal{F} von entscheidender Bedeutung. Betrachtet man zum Beispiel die σ -Algebra der Borel-Mengen über einem abgeschlossenen Intervall $[a, b] \in \mathbb{R}$, dann gelangt man zum Begriff des Riemann-Integrals für $\mathcal{F} = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$ und zum Begriff des Lebesgue-Integrals für $\mathcal{F} = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ beschränkt und meßbar}\}$.

Betrachtet man anstelle eines Maßraums eine Menge X , zusammen mit einem äußeren Maß μ , und die zugehörige σ -Algebra $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, so erhält man ein *subadditives*

Integral $I : \mathcal{A} \times \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ bzw. $I : \mathcal{A} \times \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{0+}$, definiert für eine Klasse \mathcal{F} von Funktionen $X \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $X \rightarrow \mathbb{R}_{0+}$, wenn man die Eigenschaften (I1) und (I4) fordert und die Additivitätseigenschaften (I2), (I3) und (I5) durch die folgenden Forderungen ersetzt:

(I2') Für alle $A \in \mathcal{A}$ und alle $f, g \in \mathcal{F}$ mit $\{I(A, f), I(A, g)\} \neq \{-\infty, \infty\}$ gilt $I(A, f + g) \leq I(A, f) + I(A, g)$, d. h., für alle $A \in \mathcal{A}$ ist $I(A, \cdot)$ subadditiv.

(I3') Für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle Mengen $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ mit $\{I(A_1, f), I(A_2, f)\} \neq \{-\infty, \infty\}$ gilt $I(A_1 \cup A_2, f) \leq I(A_1, f) + I(A_2, f)$, d. h., für alle $f \in \mathcal{F}$ ist $I(\cdot, f)$ subadditiv.

(I5') Für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt $I(A, \chi_A) \leq \mu(A)$.

Der Zusammenhang zwischen subadditiven Integralen und Integralen ergibt sich, falls \mathcal{F} die Familie stetiger Funktionen ist, aus dem Satz von Hahn-Banach (siehe [14, 36]).

1.5 Integration von Dichten auf nicht orientierbaren Mannigfaltigkeiten

Die Integration auf n -dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeiten wird mittels Karten und der Zerlegung der Eins auf die Integration in \mathbb{R}^n zurückgeführt (siehe z. B. [1, 40, 68]). Die Integration wird dabei meist auf orientierbaren Mannigfaltigkeiten als Integration über Differentialformen eingeführt.

Es sei (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^r -Mannigfaltigkeit ($r \geq 3$). Für ein beliebiges $k \in \{1, \dots, n\}$ ist eine C^s -glatte k -Form oder *Differentialform vom Grade k* auf M ($s < r$) eine C^s -Zuordnung a , die jedem Punkt $u \in M$ ein Element $a(u) \in \Lambda^k(T_u M)^*$ zuweist. Eine C^s -Volumenform auf M ist eine C^s -glatte n -Form auf M , die nirgends verschwindet. Wenn es eine Volumenform auf M gibt, so impliziert dies, daß M orientierbar ist. Auf einer orientierbaren Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) der Glattheit C^r ist durch den Metriktensor eine kanonische Volumenform dM gegeben.

Auf nicht notwendigerweise orientierbaren Mannigfaltigkeiten kann man anstelle von Volumenformen auch Dichten betrachten. Eine C^s -Dichte auf einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M ist eine C^s -glatte Zuordnung ρ , die jedem Punkt $u \in M$ eine Dichte $\rho(u) \in |\Lambda|^n(T_u M)^*$ im Tangentialraum $T_u M$ zuweist, die nirgends verschwindet. Eine spezielle Dichte auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist die kanonische absolute Volumenform $|dM|$.

Eine Dichte ρ auf einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M heißt *integrierbar*, wenn für eine Zerlegung $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ von M in abzählbar viele disjunkte jeweils in einem Kartengebiet enthaltene Lebesgue-meßbare Teilmengen und eine Folge $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ von Karten

mit $A_i \subset D(x_i)$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$a_i := \rho(\partial_{1,x_i}, \dots, \partial_{n,x_i}) \circ x_i^{-1} : R(x_i) \rightarrow \mathbb{R}$$

über $x_i(A_i)$ Lebesgue-integrierbar ist. Der Wert

$$\int_M \rho := \sum_{i=1}^{\infty} \int_{x_i(A_i)} a_i(x) dx$$

heißt dann *Integral* von ρ über M . Der Satz über die Zerlegung der Eins (siehe z. B. [1]) stellt sicher, daß dieser Wert unabhängig von der betrachteten Zerlegung $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ von M ist.

Für eine Teilmenge $A \subset M$ kann eine eingeschränkte Dichte ρ_A durch

$$\rho_A(u) := \begin{cases} \rho(u) & \text{für } u \in A, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert werden. Das Integral von ρ über A ist dann definiert als

$$\int_A \rho := \int_M \rho_A,$$

falls ρ_A über M integrierbar ist. Integriert man zum Beispiel über die auf eine Menge $A \subset M$ eingeschränkte absolute Volumenform $|dM|_A$ einer Riemannschen Mannigfaltigkeit, dann liefert $\int_A |dM|$ das kanonische Volumen $V(A)$ der Menge A . Ist speziell $M = \mathbb{R}^n$ mit der Euklidischen Metrik, dann stimmt das kanonische Volumen mit dem n -dimensionalen Lebesgue-Maß überein.

Für die Integration auf Mannigfaltigkeiten gibt es die folgende Transformationsformel, die auch als Satz über die Variablentransformation bezeichnet wird. Ist $\varphi : M \rightarrow N$ ein C^1 -Diffeomorphismus zwischen zwei n -dimensionalen C^3 -Mannigfaltigkeiten und $A \subset M$, so ist eine Dichte ρ auf A genau dann integrierbar, wenn $\varphi^* \rho$ auf $\varphi(A)$ integrierbar ist, und es gilt dann

$$\int_A \rho = \int_{\varphi(A)} \varphi^* \rho, \tag{1.5.1}$$

wobei das Pullback φ^* für Dichten auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten durch

$$(\varphi^* \rho)(u)(v_1, \dots, v_n) := \rho(\varphi(u))(d_u \varphi(v_1), \dots, d_u \varphi(v_n))$$

für alle $u \in M$ und alle $v_1, \dots, v_n \in T_u M$ definiert ist. Betrachtet man speziell die absolute Volumenform $|dM|$ einer Riemannschen Mannigfaltigkeit, die durch den

Riemannschen Metriktensor induziert wird, dann ist $\varphi^*|dM| = |\det(d\varphi)||dM|$, also ergibt sich

$$\int_{\varphi(A)} |dM| = \int_A |\det(d\varphi)||dM|. \quad (1.5.2)$$

Während das Integral einer Differentialform über M also nur invariant bezüglich der Untergruppe der orientierungserhaltenden Diffeomorphismen von M ist, ist das Integral einer Dichte über M invariant bezüglich der gesamten Gruppe der Diffeomorphismen von M .

1.6 Dynamische Systeme

Ein *dynamisches System* ist ein mathematisches Objekt zur Beschreibung der Zeitentwicklung physikalischer, biologischer und anderer real existierender Systeme. Es wird, in Anlehnung an [62], definiert durch einen Zustands- oder Phasenraum X , der zum Beispiel ein metrischer Raum (X, ϱ) oder allgemein ein topologischer Raum ist, und eine einparametrische Familie $\varphi^{(\cdot)}(\cdot) : \Gamma \times X \rightarrow X$ von Abbildungen φ^t , wobei $t \in \Gamma$ der Zeitparameter aus einer Zeitmenge $\Gamma \in \{\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{R}_{0+}, \mathbb{R}\}$ ist. Sind für t nur ganzzahlige Werte zugelassen, d. h. $\Gamma = \mathbb{N}_0$ oder $\Gamma = \mathbb{Z}$, so spricht man von einem *zeitdiskreten* oder kurz *diskreten* dynamischen System. Im Falle beliebiger reeller Zeitwerte, also $\Gamma = \mathbb{R}_{0+}$ oder $\Gamma = \mathbb{R}$, heißt das dynamische System *zeitkontinuierlich* oder kurz *kontinuierlich*. An die Familie von Abbildungen werden dabei folgende Bedingungen gestellt:

(DS1) Es gilt $\varphi^0(u) = u$ für alle $u \in X$, d. h., die Abbildung $\varphi^0 : X \rightarrow X$ ist die identische Abbildung id_X .

(DS2) Es gilt $\varphi^t(\varphi^s(u)) = \varphi^{t+s}(u)$ für alle $t, s \in \Gamma$ und alle $u \in X$.

(DS3) a) Ist das System zeitkontinuierlich, so ist die Abbildung $\varphi^{(\cdot)}(\cdot) : \Gamma \times X \rightarrow X$ stetig.

b) Ist das System zeitdiskret, so ist für jedes $t \in \Gamma$ die Abbildung $\varphi^t : X \rightarrow X$ stetig.

Im Falle $\Gamma \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{R}\}$ spricht man auch von einem *invertierbaren* dynamischen System, denn für $s = -t$ ergibt sich aus der Eigenschaft (DS2) die Beziehung $\varphi^{-t} = (\varphi^t)^{-1}$ für alle $t \in \Gamma$, jede Abbildung φ^t ist dann also invertierbar. Die Eigenschaft (DS2) wird für $\Gamma \in \{\mathbb{N}_0, \mathbb{R}_{0+}\}$ auch Halbgruppeneigenschaft und für $\Gamma \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{R}\}$ Gruppeneigenschaft genannt, denn sie garantiert, daß die Familie von Abbildungen $\{\varphi^t\}_{t \in \Gamma}$ eine Halbgruppe bzw. Gruppe ist.

Über die Stetigkeitseigenschaft (DS3) hinaus werden an ein dynamisches System auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) , d. h. $X \subset M$, oft auch Glattheitsfor-

derungen gestellt. Voraussetzung ist dabei im Fall $X \neq M$, daß für jedes $t \in \Gamma$ die Abbildung φ^t nicht nur auf X , sondern auf einer offenen Menge $U_t \subset M$, die X enthält, definiert ist, damit über die Differenzierbarkeit in Punkten aus dem Phasenraum X Aussagen gemacht werden können. Ein zeitkontinuierliches dynamisches System ist von der *Glattheit* C^s , wenn die Abbildung $(t, u) \mapsto \varphi^t(u)$ mit $(t, u) \in \Gamma \times X$ eine C^s -Abbildung ist. Ein diskretes dynamisches System heißt C^s -*glatt*, wenn für jedes $t \in \Gamma$ die Abbildung $\varphi^t : X \rightarrow X$ eine C^s -Abbildung ist.

Eine Menge $K \subset X$ heißt *invariant* unter dem dynamischen System φ (oder kurz φ -*invariant*), wenn sie φ^t -invariant für alle $t \in \Gamma$ ist, d. h., wenn $\varphi^t(K) = K$ für alle $t \in \Gamma$ gilt. Im Falle eines diskreten dynamischen Systems reicht es dabei aus, $\varphi^1(K) = K$ zu fordern, denn daraus folgt $\varphi^t(K) = K$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$ bzw. alle $t \in \mathbb{Z}$. Eine φ -invariante Menge $K \subset X$ heißt *maximal*, wenn für jede φ -invariante Menge $\tilde{K} \subset X$ die Inklusion $\tilde{K} \subset K$ gilt. Eine Menge $K \subset X$ heißt *positiv* bzw. *negativ invariant* unter dem dynamischen System φ , wenn $\varphi^t(K) \subset K$ bzw. $K \subset \varphi^t(K)$ für alle positiven Zeiten $t \in \Gamma$ gilt.

Betrachten wir als erstes diskrete dynamische Systeme genauer. Ein diskretes dynamisches System wird vollständig durch die Angabe einer stetigen Funktion φ^1 auf einem topologischen Raum und einer φ^1 -invarianten Menge X beschrieben. Aufgrund von Eigenschaft (DS2) ergeben sich daraus die Abbildungen φ^t für $t \in \mathbb{N}$ als t -fache Hintereinanderausführung der Abbildung φ^1 , und die Invarianz der Menge X garantiert, daß jede dieser Abbildungen auf ganz X definiert ist. Um (DS1) zu erfüllen, muß $\varphi^0 := \text{id}_X$ festgelegt werden. Eine stetige Abbildung auf einer invarianten Menge X legt also immer ein dynamisches System mit Zeitmenge $\Gamma = \mathbb{N}_0$ fest. Ist φ^1 zusätzlich ein Homöomorphismus, d. h. eine stetige und invertierbare Abbildung mit stetiger Inverser, so läßt sich durch $\varphi^{-t} := (\varphi^{-1})^t$ das dynamische System sogar für die Zeitmenge $\Gamma = \mathbb{Z}$ definieren und wird somit zu einem invertierbaren dynamischen System. Ist die Abbildung φ^1 von der Glattheit C^s , dann erhalten wir ein C^s -glattes dynamisches System. Im weiteren wird im Falle diskreter dynamischer Systeme die Abbildung φ^1 auch kurz als φ bezeichnet, da diese das gesamte dynamische System bestimmt.

Betrachten wir nun kontinuierliche dynamische Systeme. Für $\Gamma = \mathbb{R}$ wird ein solches System auch als *Fluß* und für $\Gamma = \mathbb{R}_{0+}$ als *Halbfluß* bezeichnet. Die in Abschnitt 1.3 aufgeführten globalen Flüsse, die durch ein C^s -Vektorfeld auf einer Riemannschen C^r -Mannigfaltigkeit (M, g) ($1 \leq s < r$) gegeben sind, sind spezielle kontinuierliche dynamische Systeme, die sogar invertierbar sind. Damit ist die Bezeichnung Fluß für diese Abbildungen also gerechtfertigt. Ein globaler C^s -Fluß ist ein C^s -glattes kontinuierliches dynamisches System.

Für ein dynamisches System φ definiert für festes $u \in X$ die Abbildung $t \mapsto \varphi^t(u)$ ($t \in \Gamma$) eine *Bewegung* mit Anfang u zur Zeit $t = 0$. Das Bild einer Bewegung mit Anfang u heißt *Orbit* oder *Trajektorie* durch u und wird mit $\gamma(u)$ bezeichnet. Es gilt also $\gamma(u) = \{\varphi^t(u) \mid t \in \Gamma\}$. Ist das dynamische System invertierbar, wird zwischen

dem *positiven Semiorbit* durch u , d. h. $\gamma^+(u) = \{\varphi^t(u) \mid t \in \Gamma, t \geq 0\}$, und dem *negativen Semiorbit* durch u , d. h. $\gamma^-(u) = \{\varphi^t(u) \mid t \in \Gamma, t \leq 0\}$, unterschieden.

Die Bewegung durch u heißt *konstant*, wenn $\varphi^t(u) = u$ für alle $t \in \Gamma$ gilt. Der zugehörige Orbit heißt auch *Ruhelage*. Eine Ruhelage u heißt *anziehend*, falls es eine Umgebung $U \subset X$ von u gibt, so daß $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi^t(v) = u$ für alle $v \in U$ gilt. Sie heißt *abstoßend*, wenn es eine Umgebung $U \subset X$ von u gibt, so daß für alle $v \in U \setminus \{u\}$ ein $t_v > 0$ aus Γ existiert mit $\varphi^t(v) \notin U$ für alle $t > t_v$.

Eine Bewegung durch u bzw. ihr Orbit heißt *periodisch*, wenn es ein $T > 0$ aus Γ mit $\varphi^T(u) = u$ gibt. Die kleinste Zahl T mit dieser Eigenschaft heißt *Periode* der Bewegung. Ruhelagen und periodische Orbits sind spezielle invariante Mengen des dynamischen Systems. Ist das dynamische System diskret, dann ist ein periodischer Orbit $\gamma(u)$ mit Periode $T > 0$ *anziehend* bzw. *abstoßend*, falls die Ruhelage u des durch die Abbildung φ^T definierten dynamischen Systems anziehend bzw. abstoßend ist.

Betrachten wir nun nochmals speziell dynamische Systeme auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten (M, g) mit einer Menge $X \subset M$. Es sei μ entweder das kanonische Volumen (siehe Abschnitt 1.5) oder ein äußeres Maß. Ein dynamisches System φ heißt *konservativ* bezüglich μ oder *μ -erhaltend*, wenn für beliebige Teilmengen $A \subset X$, für die $\mu(A)$ erklärt ist, die Beziehung $\mu(\varphi^t(A)) = \mu(A)$ für alle Zeiten $t \in \Gamma$ gilt. Diese Eigenschaft kann man im Fall $\mu = V$ auch durch $(\varphi^t)^*|dM| = |dM|$ für alle $t \in \Gamma$ charakterisieren, wobei $(\varphi^t)^*$ das Pullback bezeichnet (siehe Abschnitt 1.5). Hinreichende Bedingung für diese Eigenschaft ist $|\det d_u \varphi^t| = 1$ für alle $t \in \Gamma$. Das dynamische System heißt *dissipativ* bezüglich μ oder *μ -schrumpfend* (in positiver Zeitrichtung), wenn $\mu(\varphi^t(A)) < \mu(A)$ gilt, und es heißt *expansiv* bezüglich μ oder *μ -expandierend* (in positiver Zeitrichtung), wenn $\mu(\varphi^t(A)) > \mu(A)$ gilt, wobei für A alle Teilmengen von X , für die $\mu(A)$ erklärt ist, und für t alle positiven Zeiten $t \in \Gamma$ betrachtet werden.

1.7 Hausdorff-Dimension und Abschätzung nach Douady und Oesterlé

Die Hausdorff-Dimension ist für beliebige Teilmengen A eines metrischen Raumes (X, ϱ) erklärt. Für beliebige Zahlen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ und $d \in \mathbb{R}_{0+}$ wird ein äußeres Maß

$$\mu_H(A, d, \varepsilon) := \inf \sum r_i^d$$

definiert, wobei das Infimum über alle abzählbaren Überdeckungen von A durch offene Kugeln $B(u_i, r_i)$ mit Radien $r_i \leq \varepsilon$ genommen wird. Falls eine solche abzählbare Überdeckung nicht existiert, wird $\mu_H(A, d, \varepsilon) := \infty$ gesetzt. Dieses äußere Maß wird als *äußeres Hausdorffsches (d, ε) -Maß* bezeichnet. Es ist für kompakte Mengen $K \subset X$ immer endlich.

Für fixiertes d und A ist die Funktion $\mu_H(A, d, \cdot)$ monoton nichtwachsend, also existiert der Grenzwert

$$\mu_H(A, d) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \mu_H(A, d, \varepsilon)$$

in $\overline{\mathbb{R}}_{0+}$. Für jedes $d \in \mathbb{R}_{0+}$ ist die Mengenfunktion $\mu_H(\cdot, d)$ ein metrisches äußeres Maß, das *äußeres Hausdorffsches d -Maß* genannt wird. Für jede Menge A existiert ein kritischer Wert $d^* \in \overline{\mathbb{R}}_{0+}$ mit

$$\mu_H(A, d) = \begin{cases} \infty & \text{für } d \in \mathbb{R}_{0+}, d < d^*, \\ 0 & \text{für } d \in \mathbb{R}_{0+}, d > d^*. \end{cases}$$

Dieser kritische Wert ist die *Hausdorff-Dimension* von A , die mit $\dim_H(A)$ bezeichnet wird.

Eine analoge Konstruktion, bei der Überdeckungen durch Kugeln mit konstantem Radius ε betrachtet werden, liefert für $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0+0}$ die *obere Kapazitive Dimension* $\overline{\dim}_C(A)$ und für $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0+0}$ die *untere Kapazitive Dimension* $\underline{\dim}_C(A)$ der Menge A . Stimmen der obere und der untere Dimensionswert überein, so spricht man von der *Kapazitiven Dimension* $\dim_C(A) = \overline{\dim}_C(A) = \underline{\dim}_C(A)$ der Menge A .

Zwischen der Hausdorff-Dimension und der unteren und oberen Kapazitiven Dimension einer Menge A bestehen offensichtlich die Relationen

$$\dim_H(A) \leq \underline{\dim}_C(A) \leq \overline{\dim}_C(A).$$

Die Hausdorff-Dimension hat außerdem folgende wichtige Eigenschaften, die wir aus [62] zitieren:

Lemma 1.7.1 *Es sei (X, ϱ) ein beliebiger metrischer Raum. Dann gilt*

- (1) $\dim_H(\emptyset) = 0$,
- (2) $\dim_H(A) \leq \dim_H(B)$ für beliebige Teilmengen $A \subset B \subset X$,
- (3) $\dim_H(\bigcup_{i=1,2,\dots} A_i) = \sup_{i=1,2,\dots} \dim_H(A_i)$ für beliebige höchstens abzählbar viele Teilmengen $A_i \subset X$ ($i = 1, 2, \dots$),
- (4) $\dim_H(A) = 0$, falls A eine höchstens abzählbare Menge $A \subset X$ ist.
- (5) Ist (X', ϱ') ein weiterer metrischer Raum und ist $f : X \rightarrow X'$ eine Lipschitz-stetige Abbildung, d. h. eine stetige Abbildung, für die es eine Konstante $L > 0$ mit $\varrho'(f(x), f(y)) \leq L\varrho(x, y)$ für alle $x, y \in X$ gibt, dann gilt $\dim_H(f(A)) \leq \dim_H(A)$ für beliebige $A \subset X$. Existiert die Umkehrabbildung $f^{-1} : X' \rightarrow X$ und ist diese ebenfalls Lipschitz-stetig, so gilt sogar $\dim_H(f(A)) = \dim_H(A)$ für alle $A \subset X$.

In [18] haben A. Douady und J. Oesterlé für kompakte negativ invariante Mengen K von C^1 -Abbildungen $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine obere Schranke für die Hausdorff-Dimension hergeleitet, die in [58] für Abbildungen auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten verallgemeinert wurde. Dazu wurde in [58] das Verhalten des äußeren Hausdorffschen d -Maßes unter der Abbildung analysiert:

Lemma 1.7.2 *Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^3 -Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ eine offene Menge und $\varphi : U \rightarrow M$ eine C^1 -Abbildung. Weiterhin seien K und \tilde{K} kompakte Mengen mit den Eigenschaften $K \subset \tilde{K} \subset U$ und $\varphi^j(K) \subset \tilde{K}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $d \in (0, n]$, alle $l \in \mathbb{R}_+$ mit*

$$\omega_d(d_u \varphi) < l \quad \text{für alle } u \in \tilde{K} \quad (1.7.1)$$

und alle hinreichend kleinen Zahlen $\varepsilon > 0$ die Beziehung

$$\mu_H(\varphi(K), d, l^{\frac{1}{d}} \varepsilon) \leq 2^{\lfloor d \rfloor} (\lfloor d \rfloor + 1)^{\frac{d}{2}} l \mu_H(K, d, \varepsilon).$$

Auf dieser Aussage basiert auch die obere Dimensionsschranke aus [58], die hier nur für den Fall einer invarianten Menge zitiert wird. Eine analoge Aussage für nur stückweise differenzierbare Abbildungen findet sich in [63].

Satz 1.7.1 *Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^3 -Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ eine offene Menge, $\varphi : U \rightarrow M$ eine C^1 -Abbildung und $K \subset U$ eine kompakte φ -invariante Menge. Falls es eine Zahl $d \in (0, n]$ gibt, so daß*

$$\omega_d(d_u \varphi) < 1 \quad \text{für alle } u \in K \quad (1.7.2)$$

gilt, dann ist $\dim_H(K) \leq d$.

Der Beweis basiert darauf, für alle hinreichend kleinen Zahlen $\varepsilon > 0$ eine Folge von Überdeckungen $\{\mathcal{U}_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ von Kugeln mit Radien höchstens ε zu konstruieren, so daß $\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{B \in \mathcal{U}_p} r_B^d = 0$ gilt. Dabei wird von einer festen Überdeckung \mathcal{U}_1 , bestehend aus Kugeln mit hinreichend kleinen Radien, ausgegangen. Die Bilder der Kugeln unter φ bilden wegen $\varphi(K) = K$ wieder eine Überdeckung von K . Diese Bilder sind, im entsprechenden Tangentialraum betrachtet, näherungsweise Ellipsoide, die aus den in den Tangentialraum isometrisch abgebildeten Kugeln durch die Tangentialabbildung $d\varphi$ entstanden sind. Die Halbachsenlängen dieser Ellipsoide entsprechen den Singulärwerten der Tangentialabbildung. Überdeckt man jedes Ellipsoid durch Kugeln und geht man vom Tangentialraum wieder auf die Mannigfaltigkeit, dann erhält man eine neue Kugelüberdeckung von K . Die Anzahl solcher Kugeln hängt dabei von den Singulärwerten der Tangentialabbildung ab. Die Bedingung (1.7.2) stellt sicher, daß für die neue Kugelüberdeckung \mathcal{U}_2 die Summe der Radien zur Potenz d um einen gewissen Faktor $\nu \in (0, 1)$ kleiner als die entsprechende Summe der ursprünglichen Überdeckung \mathcal{U}_1 ist und stellt damit eine Kontraktionsbedingung für das äußere

Hausdorffsche d -Maß unter der Abbildung φ dar. Durch fortlaufende Wiederholung desselben Verfahrens entsteht eine Überdeckungsfolge $\{\mathcal{U}_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ mit der oben erwähnten Eigenschaft.

Es sei bemerkt, daß die Bedingung (1.7.2) für ein $d \in (0, n]$ impliziert, daß $\omega_n(d_u \varphi) = |\det(d_u \varphi)| < 1$ für alle $u \in K$ gelten muß. Das durch die Abbildung φ auf K definierte dynamische System muß also dissipativ bezüglich des kanonischen Volumens sein (siehe Abschnitt 1.6).

1.8 Topologische Entropie und Bowen-Kugeln

Die topologische Entropie als Maß für die dynamische Komplexität eines diskreten dynamischen Systems wurde in [2] eingeführt. Sie mißt für wachsende p die Wachstumsrate der Anzahl von verschiedenen Orbits der Länge p , die sich um mehr als eine Genauigkeitsschranke $\varepsilon > 0$ voneinander unterscheiden. Das kommt in der folgenden Charakterisierung der topologischen Entropie zum Ausdruck, die auf [12] zurückgeht.

Es seien (X, ϱ) ein metrischer Raum, $\varphi : X \rightarrow X$ eine stetige Abbildung, $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge und $p \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ Zahlen. Eine Teilmenge $G \subset K$ heißt (p, ε) -aufspannend für K in bezug auf φ , wenn für beliebiges $u \in K$ ein $v \in G$ existiert, so daß $\varrho(\varphi^j(u), \varphi^j(v)) < \varepsilon$ für alle $0 \leq j \leq p-1$ gilt. Es bezeichne $N_p(K, \varepsilon)$ die kleinste Mächtigkeit einer Menge G , die (p, ε) -aufspannend für K ist. Da K kompakt ist, ist $N_p(K, \varepsilon)$ immer endlich. Falls die kompakte Menge K invariant unter der Abbildung φ ist, d. h., falls $\varphi(K) = K$ gilt, so ist

$$h_{\text{top}}(\varphi|_K) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \limsup_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \ln N_p(K, \varepsilon)$$

die *topologische Entropie* von φ auf K . Diese Größe ist immer nichtnegativ.

Es seien (X, ϱ) und (X', ϱ') zwei metrische Räume und $\varphi : X \rightarrow X$ und $\varphi' : X' \rightarrow X'$ zwei stetige Abbildungen. Die Abbildungen φ und φ' heißen *topologisch konjugiert* zueinander, wenn es einen Homöomorphismus $h : X \rightarrow X'$ gibt, d. h. eine stetige Bijektion mit stetiger Umkehrabbildung, so daß $\varphi' = h \circ \varphi \circ h^{-1}$ gilt. Für eine φ -invariante Menge K und eine φ' -invariante Menge K' mit $K' = h(K)$ gilt unter diesen Voraussetzungen $h_{\text{top}}(\varphi|_K) = h_{\text{top}}(\varphi'|_{K'})$ (siehe z. B. [13]).

Die Definition der topologischen Entropie kann auf allgemeine dynamische Systeme $\varphi^{(\cdot)}(\cdot) : \Gamma \times K \rightarrow K$ auf einer kompakten Menge K ausgedehnt werden, indem die topologische Entropie des dynamischen Systems φ als

$$h_{\text{top}}(\varphi^{(\cdot)}(\cdot)|_K) := h_{\text{top}}(\varphi^1|_K)$$

festgelegt wird. Für die topologische Entropie der Abbildungen φ^t ($t \in \Gamma$) gilt dann nach [62] die folgende Aussage:

Lemma 1.8.1 *Es seien (X, ϱ) ein metrischer Raum, $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge und $\varphi^{(\cdot)}(\cdot) : \Gamma \times K \rightarrow K$ ein dynamisches System. Dann gilt für alle Zahlen $t \in \Gamma$ die Beziehung*

$$h_{\text{top}}(\varphi^t|_K) = |t|h_{\text{top}}(\varphi|_K).$$

Gehen wir nun wieder zum ursprünglich betrachteten Fall eines diskreten dynamischen Systems zurück, das durch eine stetige Abbildung $\varphi : X \rightarrow X$ auf einem metrischen Raum (X, ϱ) und eine kompakte φ -invariante Menge $K \subset X$ festgelegt ist. Zu jedem $p \in \mathbb{N}$ kann man in X eine *dynamische Metrik*

$$\varrho_p(u, v) := \max_{j=0, \dots, p-1} \varrho(\varphi^j(u), \varphi^j(v))$$

eingeführen. Dabei stimmt ϱ_1 mit der ursprünglichen Metrik ϱ überein. Mit Hilfe der Metrik ϱ_p läßt sich eine (p, ε) -aufspannende Menge $G \subset K$ für eine kompakte Menge $K \subset X$ auch dadurch charakterisieren, daß für beliebiges $u \in K$ ein $v \in G$ existiert, so daß $\varrho_p(u, v) < \varepsilon$ ist. Im metrischen Raum (X, ϱ_p) ist also das Mengensystem $\{B(v, \varepsilon)\}_{v \in G}$ eine Überdeckung von K . Die Anzahl $N_p(K, \varepsilon)$ ist damit die kleinste Anzahl der zur Überdeckung von K benötigten Kugeln vom Radius ε im metrischen Raum (X, ϱ_p) .

Ist die Abbildung φ sogar invertierbar, so kann für jedes $p \in \mathbb{N}$ eine weitere Metrik

$$\tilde{\varrho}_p(u, v) := \max_{j=-p, \dots, p} \varrho(\varphi^j(u), \varphi^j(v)).$$

durch zusätzliche Einbeziehung der Umkehrabbildung φ^{-1} gebildet werden. Die kleinste Anzahl von Kugeln vom Radius ε im metrischen Raum $(X, \tilde{\varrho}_p)$, die zur Überdeckung von K nötig ist, ist dann $N_{2p+1}(K, \varepsilon)$. Kugeln bezüglich der Metrik $\tilde{\varrho}_p$ heißen *dynamische Kugeln* oder *Bowen-Kugeln* der Ordnung p . Sie werden mit $B^p(u, \varepsilon)$ bezeichnet, wobei $u \in X$ der Mittelpunkt der Bowen-Kugel und $\varepsilon > 0$ der Radius in der Metrik $\tilde{\varrho}_p$ ist. Eine Bowen-Kugel der Ordnung p um $u \in X$ mit Radius $\varepsilon > 0$ ist also durch

$$\begin{aligned} B^p(u, \varepsilon) &:= \{v \in X \mid \varrho(\varphi^j(u), \varphi^j(v)) < \varepsilon \ (j = -p, \dots, p)\} \\ &= \bigcap_{j=-p}^p \varphi^j(B(\varphi^{-j}(u), \varepsilon)) \end{aligned} \tag{1.8.1}$$

definiert.

1.9 Hyperbolische Mengen, Lyapunov-Exponenten

Hyperbolische Mengen für Diffeomorphismen und Flüsse wurden zum ersten Mal in [4] eingeführt. Wir wollen hier die Begriffe allgemein für dynamische Systeme definieren.

Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^1 -Mannigfaltigkeit, $K \subset M$ eine kompakte Menge, $\Gamma \in \{\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{R}_{0+}, \mathbb{R}\}$ eine Zeitmenge und $\varphi^{(\cdot)}(\cdot) : \Gamma \times K \rightarrow K$ ein C^1 -glattes dynamisches System auf K , so daß die Menge K invariant unter φ ist. Aufgrund der Glattheitsforderung an φ muß es dann für jede Zeit $t \in \Gamma$ eine offene Umgebung $U_t \subset M$ von K geben, so daß φ^t auf U^t als C^1 -Abbildung definiert ist.

Die Menge K besitzt eine *äquivariante Zerlegung des Tangentialbündels* $T_K M = E^1 \oplus \dots \oplus E^p$ *bezüglich des dynamischen Systems* φ in p Teilbündel ($p \in \mathbb{N}$), wenn für jedes $u \in K$ und jedes $j \in \{1, \dots, p\}$ der Raum $E_u^j := E^j \cap T_u M$ ein n_j -dimensionaler Teilraum von $T_u M$ ist und

$$d_u \varphi^t(E_u^j) = E_{\varphi^t(u)}^j \quad \text{für alle } t \in \Gamma \quad (1.9.1)$$

gilt. Dabei sind die Zahlen $n_1, \dots, n_p \in \mathbb{N}_0$ konstant für alle Punkte $u \in K$ und erfüllen die Gleichung $n_1 + \dots + n_p = n$. Sie werden im weiteren auch als *Dimensionen der Bündel* E^1, \dots, E^p bezeichnet.

Äquivariante Zerlegungen des Tangentialraumes in Ebenen wurden zum Beispiel auch in [59] betrachtet. Eine triviale äquivariante Zerlegung des Tangentialbündels besitzt jede kompakte φ -invariante Menge K ohne kritische Punkte, d. h. ohne Punkte $u \in K$ mit $|\det(d_u \varphi)| = 0$, wenn als ein Bündel der Zerlegung das gesamte Tangentialbündel gewählt wird und die anderen Bündel jeweils das triviale Bündel $\{O_u \mid u \in K\}$ sind.

Für diskrete dynamische Systeme sei bemerkt, daß es anstelle von (1.9.1) ausreichend ist, $d_u \varphi^1(E_u^j) = E_{\varphi^1(u)}^j$ zu fordern, denn daraus ergibt sich dann induktiv die Eigenschaft (1.9.1).

Es sei nun $\varphi^{(\cdot)}(\cdot) : \Gamma \times K \rightarrow K$ ein C^1 -glattes invertierbares dynamisches System auf der kompakten φ -invarianten Menge $K \subset M$. Im Falle eines kontinuierlichen Systems wird zusätzlich gefordert, daß K keine Ruhelagen des Systems enthält. Dann heißt die Menge K *hyperbolisch* für φ , falls es eine in bezug auf φ äquivariante Zerlegung des Tangentialbündels $T_K M = E^0 \oplus E^s \oplus E^u$ mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left(\max_{u \in K} \|d_u \varphi^t|_{E^s}\| \right) < 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left(\max_{u \in K} \|d_u \varphi^{-t}|_{E^u}\| \right) < 0$$

gibt, wobei $t \in \Gamma$ betrachtet wird. Das Bündel E^0 besteht dabei für kontinuierliche dynamische Systeme jeweils aus der Geraden in der Richtung tangential zur Flußlinie, die aufgrund der Forderung, daß K keine Ruhelagen des Systems enthalten darf, immer definiert ist. Für diskrete dynamische Systeme ist $E^0 = \{O_u \mid u \in K\}$ das triviale Bündel, das jeweils nur den Ursprung jedes Tangentialraumes enthält. Dieses Bündel kann deshalb in der Zerlegung auch weggelassen werden. Wir haben hier diese Formulierung gewählt, um diskrete und kontinuierliche Systeme gleichbehandeln zu können. Es gilt damit $n_0 = 1$ im kontinuierlichen Fall und $n_0 = 0$ im diskreten Fall.

Das Bündel E^s wird auch als *stabiles Bündel* bezeichnet, da die Tangentialabbildung auf diesem Bündel stauchend wirkt, und E^u wird als *instabiles Bündel* bezeichnet, da die inverse Tangentialabbildung auf diesem Bündel stauchend wirkt.

Für die so definierten hyperbolischen Mengen ist in [22] die folgende obere Schranke der Hausdorff-Dimension unter Verwendung der topologischen Entropie des dynamischen Systems angegeben worden:

Satz 1.9.1 *Es seien (M, g) eine glatte n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, $K \subset M$ eine kompakte Menge, $\Gamma \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{R}\}$ eine Zeitmenge und $\varphi^{(\cdot)}(\cdot) : \Gamma \times K \rightarrow K$ ein C^1 -glattes dynamisches System auf K , so daß die Menge K hyperbolisch für φ ist. Weiterhin sei die Zahl*

$$\nu := \max \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left(\max_{u \in K} \|d_u \varphi^t|_{E_u^s}\| \right), \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left(\max_{u \in K} \|d_u \varphi^{-t}|_{E_u^u}\| \right) \right\}$$

definiert. Dann gilt $\dim_H(K) \leq 2 \frac{h_{\text{top}}(\varphi|_K)}{|\nu|} + n_0$.

Diese obere Abschätzung wurde in [29] dadurch verbessert, daß anstelle der Zahl ν , die die maximale Streckung der Tangentialabbildung im stabilen Bündel bzw. der inversen Tangentialabbildung im instabilen Bündel beschreibt, das gesamte Spektrum der globalen Lyapunov-Exponenten betrachtet wird. Die globalen Lyapunov-Exponenten sind dabei über Grenzwerte der Singulärwertfunktion definiert, wobei in E^s die Singulärwerte der Tangentialabbildung in der ursprünglichen Zeitrichtung und in E^u die Singulärwerte der Tangentialabbildung in umgekehrter Zeitrichtung betrachtet werden. Wir wollen hier diese Singulärwertfunktion und die globalen Lyapunov-Exponenten nicht nur für hyperbolische Mengen, sondern allgemein für Mengen mit einer äquivarianten Zerlegung des Tangentialbündels in drei Teilbündel einführen.

Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^1 -Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ eine offene Menge, $\varphi : U \rightarrow M$ ein C^1 -Diffeomorphismus und $K \subset U$ eine kompakte φ -invariante Menge mit der bezüglich φ äquivarianten Zerlegung $T_K M = E^1 \oplus E^2 \oplus E^3$, wobei E^j ein n_j -dimensionales Bündel ist ($j = 1, 2, 3$, $n_1 + n_2 + n_3 = n$). Für beliebige Punkte $u, v \in K$ seien $\alpha_1^1(u), \dots, \alpha_{n_1}^1(u)$ die Singulärwerte von $d_u \varphi|_{E_u^1}$ und $\alpha_1^2(v), \dots, \alpha_{n_2}^2(v)$ die Singulärwerte von $d_v \varphi^{-1}|_{E_v^2}$. Die Menge $\{\alpha_1^1(u), \dots, \alpha_{n_1}^1(u), \alpha_1^2(v), \dots, \alpha_{n_2}^2(v)\}$ werde zu $\{\alpha_1(u, v), \dots, \alpha_{n_1+n_2}(u, v)\}$ mit $\alpha_1(u, v) \geq \dots \geq \alpha_{n_1+n_2}(u, v)$ umgeordnet. Für eine Zahl $d \in [0, n - n_3]$ ist die *Singulärwertfunktion der Ordnung d* von φ auf K bezüglich der Zerlegung $E^1 \oplus E^2 \oplus E^3$ durch

$$\omega_{d,K}^{E^1, E^2, E^3}(\varphi) := \begin{cases} 1 & \text{für } d = 0, \\ \sup_{u, v \in K} [\alpha_1(u, v) \cdot \dots \cdot \alpha_{[d]}(u, v) \alpha_{[d]+1}(u, v)^{d-[d]}] & \text{für } d \in (0, n - n_3] \end{cases}$$

definiert. Dabei sei bemerkt, daß auf dem Bündel E^1 die Singulärwerte der Tangentialabbildung in der ursprünglichen Zeitrichtung und auf E^2 die Singulärwerte der

Tangentialabbildung in umgekehrter Zeitrichtung betrachtet werden, wogegen das Bündel E^3 überhaupt keinen Anteil für die Singulärwertfunktion liefert. Kontraktionsbedingungen, die eine obere Schranke der Hausdorff-Dimension liefern, sind obere Schranken an die Singulärwertfunktion. Also soll die Singulärwertfunktion möglichst kleine Werte annehmen. Für hyperbolische Mengen ist es deshalb sinnvoll, $E^1 = E^s$, $E^2 = E^u$ und $E^3 = E^0$ zu wählen. Im weiteren betrachten wir für hyperbolische Mengen immer diese Zerlegung des Tangentialbündels.

Für invertierbare dynamische Systeme kann die Singulärwertfunktion für die Hintereinanderausführung zweier Abbildungen φ^{t_1} und φ^{t_2} ($t_1, t_2 \in \Gamma$) betrachtet werden. Für diese Hintereinanderausführung gilt, analog zur verallgemeinerten Hornschen Ungleichung (siehe Lemma 1.2.1), die folgende Aussage:

Lemma 1.9.1 *Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^2 -Mannigfaltigkeit, $K \subset M$ eine kompakte Menge, $\Gamma \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{R}\}$ eine Zeitmenge und $\varphi^{(\cdot)}(\cdot) : \Gamma \times K \rightarrow K$ ein C^1 -glattes dynamisches System auf K , so daß für K eine bezüglich φ äquivariante Zerlegung des Tangentialbündels $T_K M = E^1 \oplus E^2 \oplus E^3$ existiert, wobei E^j ein n_j -dimensionales Bündel ist ($j = 1, 2, 3$, $n_1 + n_2 + n_3 = n$). Dann gilt für alle $d \in [0, n - n_3]$ und alle $t_1, t_2 \in \Gamma$ die Beziehung*

$$\omega_{d,K}^{E^1, E^2, E^3}(\varphi^{t_1+t_2}) \leq \omega_{d,K}^{E^1, E^2, E^3}(\varphi^{t_1}) \cdot \omega_{d,K}^{E^1, E^2, E^3}(\varphi^{t_2}).$$

Diese Eigenschaft bedeutet, daß $\omega_{d,K}^{E^1, E^2, E^3}(\varphi^t)$ in Abhängigkeit von $t \in \Gamma$ eine Subexponentialfunktion ist. Nach [69] existiert damit der Grenzwert

$$\nu_d := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \omega_{d,K}^{E^1, E^2, E^3}(\varphi^t) \quad (1.9.2)$$

für alle $d \in [0, n - n_3]$, der aufgrund der Eigenschaften einer Subexponentialfunktion in $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ liegt. Wir wollen nun zeigen, daß für den vorliegenden Fall der Wert $-\infty$ nicht möglich ist. Dazu führen wir für alle $t \in \Gamma$ die Größe

$$\rho_K^{E^1, E^2, E^3}(\varphi^t) := \min\{\min_{u \in K} \alpha_{n_1}(d_u \varphi^t|_{E_u^1}), \min_{v \in K} \alpha_{n_2}(d_v \varphi^{-t}|_{E_v^2})\}$$

ein. Da φ^t auf einer offenen Umgebung U_t der kompakten Menge K ein Diffeomorphismus ist, gilt $\rho_K^{E^1, E^2, E^3}(\varphi^t) > 0$ für alle $t \in \Gamma$. Für die Hintereinanderausführung zweier Abbildungen φ^{t_1} und φ^{t_2} ($t_1, t_2 \in \Gamma$) gilt

$$\rho_K^{E^1, E^2, E^3}(\varphi^{t_1+t_2}) \geq \rho_K^{E^1, E^2, E^3}(\varphi^{t_1}) \cdot \rho_K^{E^1, E^2, E^3}(\varphi^{t_2}).$$

Also existiert der Grenzwert

$$\rho_K^{E^1, E^2, E^3} := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \rho_K^{E^1, E^2, E^3}(\varphi^t) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Aufgrund der Beziehung $\left(\rho_K^{E^1, E^2, E^3}(\varphi^t)\right)^i \leq \omega_{i,K}^{E^1, E^2, E^3}(\varphi^t)$ für alle $i = 1, \dots, n - n_3$ gilt $\nu_i \geq \left(\rho_K^{E^1, E^2, E^3}\right)^i$. Damit sind alle in (1.9.2) definierten Grenzwerte ν_d größer als $-\infty$ und somit sämtlich aus \mathbb{R} .

Aus diesen Grenzwerten können, analog zu [29], globale Lyapunov-Exponenten definiert werden. Dazu werden die Zahlen $\nu_i - \nu_{i-1}$ ($i = 1, \dots, n - n_3$) der Größe nach als $\nu_1^u \geq \nu_2^u \geq \dots \geq \nu_{n-n_3}^u$ angeordnet. Die Zahlen ν_i^u ($i = 1, \dots, n - n_3$) heißen *globale Lyapunov-Exponenten* des dynamischen Systems φ auf K bezüglich der äquivarianten Zerlegung $E^1 \oplus E^2 \oplus E^3$. Diese Lyapunov-Exponenten sind sämtlich reell und im Falle einer hyperbolischen Menge K sogar sämtlich negativ. Das hochgestellte u in der Bezeichnung der globalen Lyapunov-Exponenten geht dabei auf den englischen Begriff „uniform“ zurück.

Unter Verwendung dieser globalen Lyapunov-Exponenten wurde in [29] die folgende obere Schranke für die Hausdorff-Dimension einer hyperbolischen Menge hergeleitet:

Satz 1.9.2 *Es seien (M, g) eine n -dimensionale glatte Riemannsche Mannigfaltigkeit, $K \subset M$ eine kompakte Menge, $\Gamma \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{R}\}$ eine Zeitmenge und $\varphi^{(\cdot)}(\cdot) : \Gamma \times K \rightarrow K$ ein C^2 -glattes dynamisches System auf K , so daß die Menge K hyperbolisch für φ ist. Weiterhin seien die Zahlen*

$$A := \lim_{t \rightarrow \infty} \max \left\{ \max_{u \in K} \|d_u \varphi^t\|^{\frac{1}{t}}, \max_{u \in K} \|d_u \varphi^{-t}\|^{\frac{1}{t}} \right\},$$

$$B := \lim_{t \rightarrow \infty} \max \left\{ \max_{u \in K} \|d_u \varphi^t|_{E_u^s}\|^{\frac{1}{t}}, \max_{u \in K} \|d_u \varphi^{-t}|_{E_u^u}\|^{\frac{1}{t}} \right\}$$

definiert, und $D \in \{0, \dots, n - n_0 - 1\}$ sei die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$2h_{top}(\varphi|_K) + \nu_1^u + \dots + \nu_D^u + \nu_{D+1}^u < 0.$$

Unter der Voraussetzung $AB^2 < 1$ gilt $\dim_H(K) \leq D + n_0 + \frac{2h_{top}(\varphi|_K) + \nu_1^u + \dots + \nu_D^u}{|\nu_{D+1}^u|}$.

Die Bedingung $AB^2 < 1$ wird auch als „pinching condition“ bezeichnet und stellt sicher, daß die äquivariante Zerlegung des Tangentialbündels im Fall $K = M$ stetig vom Punkt $u \in M$ abhängt. In einigen Arbeiten sind an den Begriff der hyperbolischen Menge stärkere Voraussetzungen gestellt worden, so daß sich diese Stetigkeit automatisch ergibt (siehe z. B. [31]). Die „pinching condition“ wird in [29] auch dazu benötigt, im Beweis von Satz 1.9.2 die Kontraktion des äußeren Hausdorffschen d -Maßes nachzuweisen.

Wir kommen nun nochmals auf die Singulärwertfunktion bezüglich einer äquivarianten Zerlegung des Tangentialbündels zurück. Analog zu Abschnitt 1.2 kann auch dieses Konzept auf Ellipsoide ausgedehnt werden. Da für Mengen mit einer äquivarianten

Zerlegung des Tangentialbündels die Tangentialabbildung jeweils eingeschränkt auf einen Teilraum E_u^j des Tangentialraumes $T_u M$ betrachtet wird, ergeben sich in jedem Teilraum Ellipsoide, so daß insgesamt direkte Summen von Ellipsoiden betrachtet werden müssen. Es seien also n und p natürliche Zahlen und E_1, \dots, E_p Euklidische Räume der Dimensionen n_1, \dots, n_p ($n_1 + \dots + n_p = n$). Für $j = 1, \dots, p$ sei $\mathcal{E}_j \subset E_j$ ein Ellipsoid mit den Halbachsenlängen $a_1^j, \dots, a_{n_j}^j$. Die Menge $\{a_1^1, \dots, a_{n_1}^1, a_1^2, \dots, a_{n_2}^2, \dots, a_1^p, \dots, a_{n_p}^p\}$ werde zu $\{a_1, \dots, a_n\}$ mit $a_1 \geq \dots \geq a_n$ umgeordnet. Dann definieren wir

$$\omega_d^{E_1, \dots, E_p}(\mathcal{E}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{E}_p) := \begin{cases} 1 & \text{für } d = 0, \\ a_1 \cdot \dots \cdot a_{\lfloor d \rfloor} a_{\lfloor d \rfloor + 1}^{d - \lfloor d \rfloor} & \text{für } d \in (0, n]. \end{cases}$$

Für solche direkten Summen von Ellipsoiden gilt die folgende Aussage, analog zu Lemma 1.2.2:

Lemma 1.9.2 *Es seien p und n natürliche Zahlen und E_1, \dots, E_p Euklidische Räume der Dimensionen n_1, \dots, n_p ($n_1 + \dots + n_p = n$). Weiterhin seien $k > 0$, $m > 0$, $\eta > 0$ und $d \in (0, n]$ Zahlen, die der Ungleichung $k \leq m^d$ genügen, und $\mathcal{E}_j \subset E_j$ ($j = 1, \dots, p$) Ellipsoide mit $\alpha_1(\mathcal{E}_j) \leq m$ und $\omega_d^{E_1, \dots, E_p}(\mathcal{E}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{E}_p) \leq k$. Dann existieren Ellipsoide $\mathcal{E}'_j \subset E_j$ ($j = 1, \dots, p$), so daß die Menge $(\mathcal{E}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{E}_p) + B(O, \eta)$ in $\mathcal{E}'_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{E}'_p$ enthalten ist und*

$$\omega_d^{E_1, \dots, E_p}(\mathcal{E}'_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{E}'_p) \leq \left[1 + \left(\frac{m^{\lfloor d \rfloor}}{k} \right)^{1/(d - \lfloor d \rfloor)} \eta \right]^d k$$

gilt.

1.10 Untere Dimensionsschranken nach Frostman und Shereshevskij

Untere Dimensionsschranken, die nichtganzzahlige Werte liefern können, basieren oftmals auf dem Lemma von Frostman (siehe z. B. [61]). Hier zitieren wir eine modifizierte Variante aus [20]:

Lemma 1.10.1 *Es seien (X, ρ) ein metrischer Raum, $K \subset X$ eine Teilmenge und μ ein endliches äußeres Borel-Maß auf X , das auf K konzentriert ist. Weiterhin gelte $\mu(K) > 0$. Falls es Zahlen $d \geq 0$, $c > 0$ und $\varepsilon_0 > 0$ gibt, so daß für alle $r \in (0, \varepsilon_0]$ und alle $x \in K$ die Beziehung $\mu(B(x, r)) \leq cr^d$ gilt, dann gilt $\dim_H(K) \geq d$.*

Das in Lemma 1.10.1 verwendete äußere Maß μ ist bis auf einen Faktor c eine Minorante für das äußere Hausdorffsche (d, ε) -Maß für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ und damit auch für das äußere Hausdorffsche d -Maß. Da $\mu(K) > 0$ vorausgesetzt wurde, muß damit auch $\mu_H(K, d) > 0$ gelten.

Für geometrische Konstruktionen auf der reellen Achse, die auch von L. Barreira in [6] betrachtet wurden, hat M. A. Shereshevskij ([66]) eine untere Schranke für die Hausdorff-Dimension zusammen mit einer oberen Schranke angegeben. Es sei bemerkt, daß die obere Schranke im weiteren keine Verwendung findet, da sie im Rahmen dieser Arbeit durch andere Abschätzungen verbessert werden kann. Deshalb wird hier nur die untere Abschätzung zitiert:

Satz 1.10.1 *Es sei $k > 1$ eine natürliche Zahl, und für jedes $p \in \mathbb{N}$ und jedes p -Tupel $(\omega_1, \dots, \omega_p) \in \{1, \dots, k\}^p$ existiere ein abgeschlossenes Intervall $D_{\omega_1, \dots, \omega_p} \subset \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

- 1) *Für zwei p -Tupel $(\omega_1, \dots, \omega_p) \neq (\omega'_1, \dots, \omega'_p)$ gilt $D_{\omega_1, \dots, \omega_p} \cap D_{\omega'_1, \dots, \omega'_p} = \emptyset$.*
- 2) *Für jedes $(\omega_1, \dots, \omega_p, \omega_{p+1}) \in \{1, \dots, k\}^{p+1}$ gilt $D_{\omega_1, \dots, \omega_{p+1}} \subset D_{\omega_1, \dots, \omega_p}$.*

Falls es Zahlen $\alpha > 0$ und $r \in (0, 1)$ gibt, so daß

$$|D_{\omega_1, \dots, \omega_p}| \geq \alpha r^p$$

für alle $p \in \mathbb{N}$, $(\omega_1, \dots, \omega_p) \in \{1, \dots, k\}^p$ gilt, dann kann die Hausdorff-Dimension der Menge

$$D = \bigcap_{p=1}^{\infty} \bigcup_{(\omega_1, \dots, \omega_p) \in \{1, \dots, k\}^p} D_{\omega_1, \dots, \omega_p}$$

nach unten durch $\dim_H(D) \geq -\frac{\ln k}{\ln r}$ abgeschätzt werden.

In dieser Abschätzung muß kein äußeres Maß mit bestimmten Eigenschaften konstruiert werden. Es werden nur die Durchmesser von Teilmengen von D analysiert, also Eigenschaften der Metrik verwendet. Natürlich setzt diese Vorgehensweise eine sehr spezielle Struktur der betrachteten Menge voraus. M. A. Shereshevskij verwendet diese Abschätzung in \mathbb{R} , um für Mengen im \mathbb{R}^2 , die bei Bifurkationen entstehen, untere Dimensionsschranken (zusammen mit oberen Abschätzungen) herzuleiten.

Kapitel 2

Hausdorff-Maß-expandierende Abbildungen

In diesem Kapitel wird eine Klasse von im allgemeinen nicht injektiven Abbildungen betrachtet, die auf einer Teilmenge der invarianten Menge das äußere Hausdorffsche d -Maß pro Iteration um einen Faktor $a \geq 1$ vergrößert. Unter dieser Voraussetzung kann die obere Schranke 1 an die Singulärwertfunktion, die im Satz von Douady und Oesterlé eine Kontraktion des äußeren Hausdorffschen d -Maßes garantiert, auf a vergrößert werden. Die wesentlichen Ergebnisse dieses Kapitels sind Bestandteil der Arbeit [9].

2.1 Eine Klasse von Hausdorff-Maß-expandierenden Abbildungen

Als erstes möchten wir die Klasse der Abbildungen, die auf einer invarianten Menge expandierend bezüglich des äußeren Hausdorffschen d -Maßes mit Expansionsfaktor a wirkt, definieren.

Definition 2.1.1 *Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ eine offene Menge, $\varphi : U \rightarrow M$ eine Abbildung, $K \subset U$ eine kompakte Menge und $a \geq 1$ und $d \in [0, n]$ reelle Zahlen. Die Abbildung φ heißt **$\mu_H(\cdot, d)$ -expandierend** mit dem Faktor a auf K , falls es eine Zahl $j_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle natürlichen Zahlen $j > j_0$ eine Teilmenge $K_j \subset K$ mit den Eigenschaften*

$$(AE1) \quad a^j \mu_H(K_j, d) \leq \mu_H(K, d),$$

$$(AE2) \quad \mu_H(\varphi^j(K_j), d) = \mu_H(\varphi^j(K), d)$$

existiert.

Das äußere Hausdorffsche d -Maß der Menge K_j wird im Verhältnis zum d -Maß der Menge K unter der Abbildung φ^j mindestens um den Faktor a^j vergrößert. Das entspricht einer mittleren Vergrößerung um wenigstens den Faktor a pro Iteration der Abbildung. Die einfachste Möglichkeit, die Eigenschaft (AE2) zu erfüllen, besteht darin, Mengen K_j mit $\varphi^j(K_j) = \varphi^j(K)$ zu wählen.

Eine $\mu_H(\cdot, d)$ -expandierende Abbildung mit Faktor a ist auch $\mu_H(\cdot, d)$ -expandierend mit Faktor \tilde{a} für alle $\tilde{a} \in [1, a]$. Da die Zahl a aber als obere Schranke an die Singulärwertfunktion in Dimensionsabschätzungen nach A. Douady und J. Oesterlé eingehen soll, ist es sinnvoll, die Zahl a so groß wie möglich zu wählen.

Beispiel 2.1.1 Betrachten wir als einfachsten Vertreter einer $\mu_H(\cdot, d)$ -expandierenden Abbildung eine Zeltabbildung in $M = \mathbb{R}$. Diese Abbildung sei durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} 3x & \text{für } x < \frac{1}{2}, \\ 3 - 3x & \text{für } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

definiert. Der Graph dieser Abbildung ist in Abb. 2.1 dargestellt.

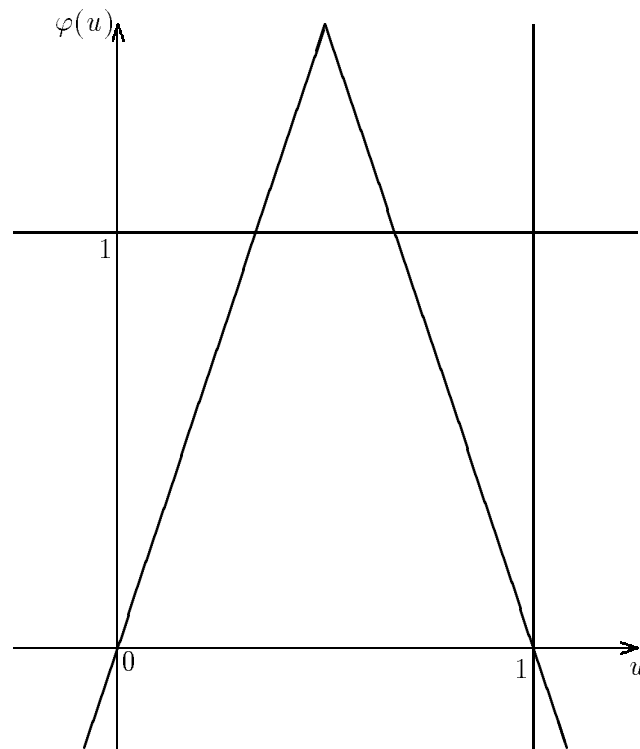


Abbildung 2.1: Zeltabbildung

Für Punkte $x < 0$ oder $x > 1$ gilt $\lim_{p \rightarrow \infty} \varphi^p(x) = -\infty$, also muß eine kompakte invariante Menge dieser Abbildung in $[0, 1]$ enthalten sein. Es bezeichne K die maximale kompakte invariante Menge von φ , d. h. $K := \bigcap_{p=0}^{\infty} \varphi^{-p}([0, 1]) = \bigcap_{p=0}^{\infty} K^p$ mit $K^p := \bigcap_{i=0}^p \varphi^{-i}([0, 1])$. Die Mengen K^p haben dabei die Form $K^0 = [0, 1]$, $K^1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, $K^2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ und so weiter (siehe Abb. 2.2). Die durch diesen Grenzprozeß entstehende Menge K wird auch als Standard-Cantor-Menge bezeichnet.

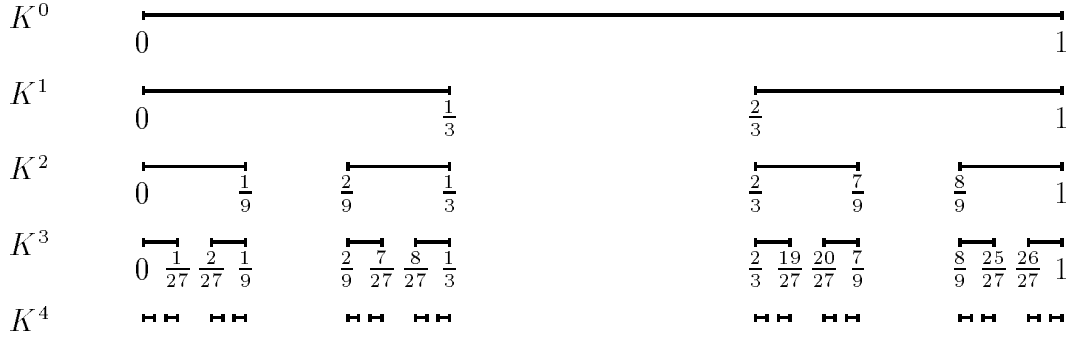


Abbildung 2.2: Konstruktion der invarianten Menge

Es seien $K_j := K \cap [0, \frac{1}{3^j}]$ ($j \in \mathbb{N}$). Diese Mengen sind jeweils eine „lineare Kopie“ der Menge K mit dem Faktor $\frac{1}{3^j}$. Damit liefert für jede Zahl $\varepsilon > 0$ eine Überdeckung der Menge K_j durch Kugeln mit Radien höchstens ε eine Überdeckung von K durch Kugeln mit Radien höchstens $3^j \varepsilon$ und umgekehrt. Es sei bemerkt, daß in diesem eindimensionalen Fall Kugeln immer offene Intervalle sind. Für beliebiges $d \in [0, 1]$ gilt damit für das äußere Hausdorffsche (d, ε) -Maß von K^j die Beziehung

$$\mu_H(K_j, d, \varepsilon) = \left(\frac{1}{3^j}\right)^d \mu_H(K, d, 3^j \varepsilon).$$

Durch Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0 + 0$ erhält man daraus

$$\mu_H(K_j, d) = \left(\frac{1}{3^d}\right)^j \mu_H(K, d).$$

Also gilt (AE1) für beliebiges $d \in [0, 1]$ mit dem Faktor $a = 3^d$. Außerdem ist $\varphi^j(K_j) = \varphi^j(K) = K$ für alle $j \in \mathbb{N}$, also ist (AE2) erfüllt. Damit ist die Zeltabbildung φ für beliebiges $d \in [0, 1]$ eine $\mu_H(\cdot, d)$ -expandierende Abbildung auf der invarianten Menge K mit dem Faktor 3^d . \square

2.2 Obere Dimensionsschranken

Als erstes wollen wir, analog zur Vorgehensweise von [18], analysieren, wie sich das äußere Hausdorffsche d -Maß für kompakte, nicht notwendigerweise invariante Mengen unter einer $\mu_H(\cdot, d)$ -expandierenden Abbildung verhält.

Satz 2.2.1 *Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^3 -Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ eine offene Menge und $\varphi : U \rightarrow M$ eine C^1 -Abbildung. Weiterhin seien K und \tilde{K} kompakte Mengen mit den Eigenschaften $K \subset \tilde{K} \subset U$ und $\varphi^j(K) \subset \tilde{K}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und $a \geq 1$ und $d \in (0, n]$ Zahlen, so daß φ auf K eine $\mu_H(\cdot, d)$ -expandierende Abbildung mit Faktor a ist und $\mu_H(K, d) < \infty$ gilt. Unter der Voraussetzung*

$$\omega_d(d_u \varphi) < a \quad \text{für alle } u \in \tilde{K} \quad (2.2.1)$$

gilt dann $\lim_{j \rightarrow \infty} \mu_H(\varphi^j(K), d) = 0$.

Beweis Aufgrund der Eigenschaft $\varphi^j(K) \subset \tilde{K}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt mit Lemma 1.2.1

$$\omega_d(d_v \varphi^j) \leq \left(\sup_{u \in \tilde{K}} \omega_d(d_u \varphi) \right)^j$$

für alle $v \in K$ und alle $j \in \mathbb{N}$. Nun sei $\delta > 0$ eine beliebige Zahl. Aus (2.2.1) folgt $\frac{\sup_{u \in \tilde{K}} \omega_d(d_u \varphi)}{a} < 1$. Dann existiert ein $j_\delta \in \mathbb{N}$, das größer als die durch Definition 2.1.1 festgelegte Zahl j_0 ist, so daß

$$2^{\lfloor d \rfloor} (\lfloor d \rfloor + 1)^{\frac{d}{2}} \left(\frac{\sup_{u \in \tilde{K}} \omega_d(d_u \varphi)}{a} \right)^j \leq \delta$$

für alle $j > j_\delta$ gilt. Mit Lemma 1.7.2 und den Eigenschaften der $\mu_H(\cdot, d)$ -expandierenden Abbildung φ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \mu_H(\varphi^j(K), d) &= \mu_H(\varphi^j(K_j), d) \leq 2^{\lfloor d \rfloor} (\lfloor d \rfloor + 1)^{\frac{d}{2}} \left(\sup_{u \in \tilde{K}} \omega_d(d_u \varphi) \right)^j \mu_H(K_j, d) \\ &\leq 2^{\lfloor d \rfloor} (\lfloor d \rfloor + 1)^{\frac{d}{2}} \left(\frac{\sup_{u \in \tilde{K}} \omega_d(d_u \varphi)}{a} \right)^j \mu_H(K, d) \leq \delta \mu_H(K, d) \end{aligned}$$

für alle $j > j_\delta$. Da $\delta > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt daraus die Behauptung. ■

Um eine obere Schranke für die Hausdorff-Dimension der Menge K zu finden, können wir nicht $\mu_H(K, d) < \infty$ wie in Satz 2.2.1 voraussetzen. Deshalb ist es notwendig, anstelle des äußeren Hausdorffschen d -Maßes das (d, ε) -Maß zu betrachten, da dieses für kompakte Mengen immer endlich ist. Deshalb muß für die $\mu_H(\cdot, d)$ -expandierende Abbildung φ zusätzlich eine Bedingung gestellt werden, die beschreibt, wie sich das äußere Hausdorffsche (d, ε) -Maß unter der Abbildung verhält.

Satz 2.2.2 *Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^3 -Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ eine offene Menge, $\varphi : U \rightarrow M$ eine C^1 -Abbildung und $K \subset U$ eine kompakte φ -invariante Menge. Weiterhin seien $a \geq 1$ und $d \in (0, n]$ Zahlen, so daß*

$$\omega_d(d_u \varphi) < a \quad \text{für alle } u \in K \quad (2.2.2)$$

gilt und außerdem Zahlen $l \in (\sup_{u \in K} \omega_d(d_u \varphi), a)$ und $j_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so daß es für alle natürlichen $j > j_0$ eine Menge $K_j \subset K$ und eine Zahl $\varepsilon_j > 0$ gibt mit

$$a^j \mu_H(K_j, d, (\lfloor d \rfloor + 1)^{-\frac{1}{2}} l^{-\frac{j}{d}} \varepsilon) \leq \mu_H(K, d, \varepsilon) \quad (2.2.3)$$

und

$$\mu_H(\varphi^j(K_j), d, \varepsilon) = \mu_H(\varphi^j(K), d, \varepsilon) \quad (2.2.4)$$

für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_j]$. Dann gilt $\dim_H(K) \leq d$.

Beweis Aufgrund von Lemma 1.2.1 gilt hier

$$\sup_{u \in K} \omega_d(d_u \varphi^j) \leq \left(\sup_{u \in K} \omega_d(d_u \varphi) \right)^j < l^j$$

für alle $j \in \mathbb{N}$. Wegen $\frac{l}{a} < 1$ existiert für beliebiges $\delta > 0$ eine natürliche Zahl $j_\delta > j_0$ mit $2^{\lfloor d \rfloor} (\lfloor d \rfloor + 1)^{\frac{d}{2}} \left(\frac{l}{a}\right)^j < \delta$ für alle $j > j_\delta$. Für hinreichend kleine Zahlen $\varepsilon \in (0, \varepsilon_j)$ folgt mit Lemma 1.7.2 und den Beziehungen (2.2.2), (2.2.3) und (2.2.4)

$$\begin{aligned} \mu_H(K, d, \varepsilon) &= \mu_H(\varphi^j(K), d, \varepsilon) = \mu_H(\varphi^j(K_j), d, \varepsilon) \\ &\leq 2^{\lfloor d \rfloor} (\lfloor d \rfloor + 1)^{\frac{d}{2}} l^j \mu_H(K_j, d, (\lfloor d \rfloor + 1)^{-\frac{1}{2}} l^{-\frac{j}{d}} \varepsilon) \\ &\leq 2^{\lfloor d \rfloor} (\lfloor d \rfloor + 1)^{\frac{d}{2}} \left(\frac{l}{a}\right)^j \mu_H(K, d, \varepsilon) \leq \delta \mu_H(K, d, \varepsilon). \end{aligned}$$

Da die Zahl $\delta > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, bedeutet das $\mu_H(K, d, \varepsilon) = 0$ für alle hinreichend kleinen Zahlen $\varepsilon > 0$ und damit $\mu_H(K, d) = 0$. Daraus ergibt sich $\dim_H(K) \leq d$. ■

Bemerkung 2.2.1 Im Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0 + 0$ geht Bedingung (2.2.3) in (AE1) über, und aus (2.2.3) ergibt sich (AE2). Also sind die Abbildungen, die die Voraussetzungen des Satzes 2.2.2 erfüllen, spezielle $\mu_H(\cdot, d)$ -expandierende Abbildungen mit Faktor a .

In Anwendungsbeispielen erweist es sich als sehr schwierig, die Bedingung (2.2.3) zu überprüfen, besonders dann, wenn die Abbildung nicht stückweise linear ist. Deshalb wollen wir nun stärkere Bedingungen an die Abbildung formulieren, die sich aber leichter überprüfen lassen.

Folgerung 2.2.1 *Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^3 -Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ eine offene Menge, $\varphi : U \rightarrow M$ eine C^1 -Abbildung und $K \subset U$ eine kompakte φ -invariante Menge. Weiterhin seien $a \geq 1$ und $d \in (0, n]$ Zahlen, so daß (2.2.2) erfüllt ist und außerdem Zahlen $l_0 > 0$ und $j_1 \in \mathbb{N}$ existieren, so daß es für alle $j \geq j_1$ eine kompakte Menge $K_j \subset K$ mit $\varphi^j(K_j) = K$, eine natürliche Zahl N_j und C^1 -Abbildungen $f_{i,j} : U \rightarrow M$ ($i = 1, \dots, N_j$) mit folgenden Eigenschaften gibt:*

$$K_j = \bigcup_{i=1}^{N_j} f_{i,j}(K), \quad (2.2.5)$$

$$\max_{i=1, \dots, N_j} \omega_d(d_u f_{i,j}) < l_0^j \quad \text{für alle } u \in K, \quad (2.2.6)$$

$$N_j < 2^{-\lfloor d \rfloor} (\lfloor d \rfloor + 1)^{-\frac{d}{2}} (al_0)^{-j}. \quad (2.2.7)$$

Dann gilt $\dim_H(K) \leq d$.

Beweis Aus Lemma 1.7.2 und den Beziehungen (2.2.5) und (2.2.6) folgt, daß es für jedes $j \in \mathbb{N}$ mit $j > j_1$ eine Zahl $\varepsilon_j > 0$ mit

$$\begin{aligned} \mu_H(K_j, d, (\lfloor d \rfloor + 1)^{\frac{d}{2}} \varepsilon) &\leq \sum_{i=1}^{N_j} 2^{\lfloor d \rfloor} (\lfloor d \rfloor + 1)^{\frac{d}{2}} l_0^j \mu_H(K, d, \varepsilon) \\ &= N_j 2^{\lfloor d \rfloor} (\lfloor d \rfloor + 1)^{\frac{d}{2}} l_0^j \mu_H(K, d, \varepsilon) \end{aligned}$$

für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_j]$ gibt. Mit (2.2.7) folgt daraus

$$\mu_H(K_j, d, (\lfloor d \rfloor + 1)^{\frac{1}{2}} l_0^{\frac{j}{2}} \varepsilon) \leq a^{-j} \mu_H(K, d, \varepsilon).$$

Wegen $N_j \geq 1$ folgt aus (2.2.7) die Ungleichung $2^{-\lfloor d \rfloor} (\lfloor d \rfloor + 1)^{-\frac{d}{2}} (al_0)^{-j} \geq 1$ für alle $j \geq j_1$. Aufgrund von (2.2.2) muß damit $l_0 \sup_{u \in K} \omega_d(d_u \varphi) < 1$ gelten. Also existieren Zahlen $l \in (\sup_{u \in K} \omega_d(d_u \varphi), a)$ und $j_0 \geq j_1$, so daß $(l_0 l)^j < (\lfloor d \rfloor + 1)^{-d}$ für alle $j > j_0$ gilt. Für alle $j > j_0$ gilt damit

$$\mu_H(K_j, d, (\lfloor d \rfloor + 1)^{-\frac{1}{2}} l^{-\frac{j}{2}} \varepsilon) \leq \mu_H(K_j, d, (\lfloor d \rfloor + 1)^{\frac{1}{2}} l_0^{\frac{j}{2}} \varepsilon) \leq a^{-j} \mu_H(K, d, \varepsilon).$$

Damit sind alle Voraussetzungen von Satz 2.2.2 erfüllt, und wir erhalten die Abschätzung $\dim_H(K) \leq d$. ■

2.3 Einbeziehung von Lyapunov-Funktionen

In [48] sind in die Dimensionsabschätzungen nach A. Douady und J. Oesterlé für Abbildungen in \mathbb{R}^n Lyapunov-Funktionen mit einbezogen worden, um bessere Dimensionsschranken zu erhalten. Lyapunov-Funktionen sind dabei stetige reellwertige

Hilfsfunktionen, die vorwiegend in der Stabilitätstheorie Einsatz finden und hier dazu verwendet werden, die Singulärwertfunktion zu verkleinern und dadurch eine Kontraktionsbedingung für das äußere Hausdorff-Maß zu erhalten. Wir wollen hier diese Vorgehensweise an den Sätzen aus Abschnitt 2.2 demonstrieren. Ist eine Lyapunov-Funktionen hinreichend glatt, kann ihre Einführung als Änderung des Metrik-Tensors interpretiert werden.

Satz 2.3.1 *Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^3 -Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ eine offene Menge, $\varphi : U \rightarrow M$ eine C^1 -Abbildung und $K \subset U$ eine kompakte φ -invariante Menge. Weiterhin seien $p : K \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine stetige Funktion und $a \geq 1$ und $d \in (0, n]$ Zahlen, so daß*

$$\left(\frac{p(\varphi(u))}{p(u)} \omega_d(d_u \varphi) \right) < a \quad \text{für alle } u \in K \quad (2.3.1)$$

gilt und außerdem Zahlen $l \in \left(\sup_{u \in K} \left(\frac{p(\varphi(u))}{p(u)} \omega_d(d_u \varphi) \right), a \right)$ und $j_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so daß es für alle natürlichen $j > j_0$ eine Menge $K_j \subset K$ und eine Zahl $\varepsilon_j > 0$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

$$a^j \mu_H \left(K_j, d, ([d] + 1)^{-\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{d}} \left(\frac{\inf_{u \in K} p(u)}{\sup_{u \in K} p(u)} \right)^{\frac{1}{d}} \varepsilon \right) \leq \mu_H(K, d, \varepsilon) \quad (2.3.2)$$

und (2.2.4) für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_j]$. Dann gilt $\dim_H(K) \leq d$.

Beweis Wegen $l \in \left(\sup_{u \in K} \left(\frac{p(\varphi(u))}{p(u)} \omega_d(d_u \varphi) \right), a \right)$ gilt $\omega_d(d_u \varphi) < l \frac{p(u)}{p(\varphi(u))}$ für alle $u \in K$. Damit gilt mit Lemma 1.7.2

$$\begin{aligned} \omega_d(d_u \varphi^j) &\leq \omega_d(d_{\varphi^{j-1}(u)} \varphi) \dots \omega_d(d_u \varphi) \leq l \frac{p(\varphi^{j-1}(u))}{p(\varphi^j(u))} l \dots \frac{p(u)}{p(\varphi(u))} \\ &= l^j \frac{p(u)}{p(\varphi^j(u))} \leq l^j \frac{\sup_{u \in K} p(u)}{\inf_{u \in K} p(u)} \end{aligned}$$

für alle $j \in \mathbb{N}$ und alle $u \in K$. Nun sei $\delta > 0$ beliebig gewählt. Aufgrund von $\frac{l}{a} < 1$ existiert eine Zahl $j_\delta > j_0$ mit

$$2^{[d]} ([d] + 1)^{\frac{d}{2}} \left(\frac{l}{a} \right)^j \frac{\sup_{u \in K} p(u)}{\inf_{u \in K} p(u)} \leq \delta$$

für alle $j > j_\delta$. Für alle hinreichend kleinen Zahlen $\varepsilon \in (0, \varepsilon_j)$ folgt mit Lemma 1.7.2 sowie den Beziehungen (2.3.1), (2.3.2) und (2.2.4)

$$\begin{aligned} \mu_H(K, d, \varepsilon) &= \mu_H(\varphi^j(K), d, \varepsilon) = \mu_H(\varphi^j(K_j), d, \varepsilon) \\ &\leq 2^{[d]} ([d] + 1)^{\frac{d}{2}} l^j \frac{\sup_{u \in K} p(u)}{\inf_{u \in K} p(u)} \mu_H \left(K_j, d, ([d] + 1)^{-\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{d}} \left(\frac{\inf_{u \in K} p(u)}{\sup_{u \in K} p(u)} \right)^{\frac{1}{d}} \varepsilon \right) \\ &\leq 2^{[d]} ([d] + 1)^{\frac{d}{2}} \left(\frac{l}{a} \right)^j \frac{\sup_{u \in K} p(u)}{\inf_{u \in K} p(u)} \mu_H(K, d, \varepsilon) \leq \delta \mu_H(K, d, \varepsilon). \end{aligned}$$

Da die Zahl $\delta > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, bedeutet das $\mu_H(K, d, \varepsilon) = 0$ für alle hinreichend kleinen Zahlen $\varepsilon > 0$ und damit $\mu_H(K, d) = 0$. Daraus ergibt sich $\dim_H(K) \leq d$. ■

Folgerung 2.3.1 *Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^3 -Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ eine offene Menge, $\varphi : U \rightarrow M$ eine C^1 -Abbildung und $K \subset U$ eine kompakte φ -invariante Menge. Weiterhin seien $p : K \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine stetige Funktion und $a \geq 1$ und $d \in (0, n]$ Zahlen, so daß (2.3.1) erfüllt ist und außerdem Zahlen $l_0 > 0$ und $j_1 \in \mathbb{N}$ existieren, so daß es für alle $j \geq j_1$ eine kompakte Menge $K_j \subset K$ mit $\varphi^j(K_j) = K$, eine natürliche Zahl N_j und C^1 -Abbildungen $f_{i,j} : U \rightarrow M$ ($i = 1, \dots, N_j$) mit den Eigenschaften (2.2.5), (2.2.6) und (2.2.7) gibt. Dann gilt $\dim_H(K) \leq d$.*

Beweis Aus Lemma 1.7.2 und den Beziehungen (2.2.5) und (2.2.6) folgt, daß es für jedes $j \in \mathbb{N}$ mit $j > j_1$ eine Zahl $\varepsilon_j > 0$ mit

$$\begin{aligned} \mu_H \left(K_j, d, (\lfloor d \rfloor + 1)^{\frac{d}{2}} \varepsilon \right) &\leq \sum_{i=1}^{N_j} 2^{\lfloor d \rfloor} (\lfloor d \rfloor + 1)^{\frac{d}{2}} l_0^j \mu_H(K, d, \varepsilon) \\ &= N_j 2^{\lfloor d \rfloor} (\lfloor d \rfloor + 1)^{\frac{d}{2}} l_0^j \mu_H(K, d, \varepsilon) \end{aligned}$$

für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_j]$ gibt. Mit (2.2.7) folgt daraus

$$\mu_H \left(K_j, d, (\lfloor d \rfloor + 1)^{\frac{1}{2}} l_0^{\frac{j}{d}} \varepsilon \right) \leq a^{-j} \mu_H(K, d, \varepsilon).$$

Wegen $N_j \geq 1$ folgt aus (2.2.7) die Ungleichung $2^{-\lfloor d \rfloor} (\lfloor d \rfloor + 1)^{-\frac{d}{2}} (a l_0)^{-j} \geq 1$ für alle $j \geq j_1$. Aufgrund von (2.3.1) muß damit $l_0 \sup_{u \in K} \left(\frac{p(\varphi(u))}{p(u)} \omega_d(d_u \varphi) \right) < 1$ gelten. Also existieren Zahlen $l \in \left(\sup_{u \in K} \left(\frac{p(\varphi(u))}{p(u)} \omega_d(d_u \varphi) \right), a \right)$ und $j_0 \geq j_1$, so daß $(l_0 l)^j < (\lfloor d \rfloor + 1)^{-d} \frac{\inf_{u \in K} p(u)}{\sup_{u \in K} p(u)}$ für alle $j > j_0$ gilt. Für alle $j > j_0$ gilt damit

$$\begin{aligned} \mu_H \left(K_j, d, (\lfloor d \rfloor + 1)^{-\frac{1}{2}} l^{-\frac{j}{d}} \left(\frac{\inf_{u \in K} p(u)}{\sup_{u \in K} p(u)} \right)^{\frac{1}{d}} \varepsilon \right) &\leq \mu_H \left(K_j, d, (\lfloor d \rfloor + 1)^{\frac{1}{2}} l_0^{\frac{j}{d}} \varepsilon \right) \\ &\leq a^{-j} \mu_H(K, d, \varepsilon). \end{aligned}$$

Somit sind alle Voraussetzungen von Satz 2.3.1 erfüllt, und wir erhalten die Abschätzung $\dim_H(K) \leq d$. ■

2.4 Anwendungsbeispiele

2.4.1 Stückweise lineare Abbildungen in \mathbb{R}^n

Für stückweise lineare Abbildungen lassen sich die Bedingungen der Dimensionsabschätzungen aus den Abschnitten 2.2 und 2.3 am einfachsten überprüfen, denn die Singulärwerte der Tangentialabbildung sind stückweise konstant und die invarianten Mengen lassen sich oftmals als Cantor-Mengen konstruieren.

Wir betrachten als speziellen Vertreter einer stückweise linearen Abbildung in \mathbb{R} die in Beispiel 2.1.1 eingeführte Zeltabbildung, deren invariante Menge K die Standard-Cantor-Menge ist. Wie in Beispiel 2.1.1 erläutert wurde, ist diese Abbildung $\mu_H(\cdot, d)$ -expandierend auf K mit dem Faktor $a = 3^d$ für alle $d \in [0, 1]$. Da der einzige Singulärwert dieser Abbildung 3 ist, stimmt hier a mit ω_d überein, so daß sich die Bedingung (2.2.2) nicht erfüllen läßt. Bei konstanter Singulärwertfunktion kann dieses Problem auch nicht durch Einbeziehung einer Lyapunov-Funktion gelöst werden. Wir können diese Abbildung aber zu einer stückweise linearen Abbildung $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch die Vorschrift

$$\tilde{\varphi}(x, y) = (\varphi(x), \lambda y) \quad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

fortsetzen, in der $\lambda \in (0, 1)$ ein Parameter ist. Dann ist die Menge $\tilde{K} = K \times \{0\}$ invariant unter der Abbildung $\tilde{\varphi}$. Es seien $\tilde{K}_j := K_j \times \{0\}$ mit den in Beispiel 2.1.1 definierten Mengen K_j ($j \in \mathbb{N}$). Somit ergibt sich auch für $d \in (1, 2]$ die Beziehung

$$3^{dj} \mu_H \left(\tilde{K}_j, d, \frac{1}{3^j} \varepsilon \right) = \mu_H(\tilde{K}, d, \varepsilon) \quad (2.4.1)$$

für alle $\varepsilon > 0$. Außerdem gilt $\tilde{\varphi}(\tilde{K}_j) = \tilde{K}$. Also ist $\tilde{\varphi}$ auf \tilde{K} eine $\mu_H(\cdot, d)$ -expandierende Abbildung mit dem Faktor 3^d für $d \in (1, 2]$. Außerdem gilt in diesem Bereich für d die Beziehung $\omega_d(d_u \tilde{\varphi}) = 3\lambda^{d-1}$ für alle $u \in \tilde{K}$, damit ist die Bedingung (2.2.2) erfüllt.

Wir betrachten nun eine beliebige Zahl $l \in (3\lambda^{d-1}, 3^d)$. Dann gibt es ein $j_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\left(\frac{l^{\frac{1}{d}}}{3} \right)^j < (|d| + 1)^{-\frac{1}{2}}$$

für alle $j > j_0$ und damit $(|d| + 1)^{-\frac{1}{2}} l^{-\frac{j}{d}} > \frac{1}{3^j}$. Zusammen mit (2.4.1) ergibt sich daraus aufgrund der Monotonie von $\mu_H(\tilde{K}_j, d, \cdot)$ die Ungleichung

$$3^{dj} \mu_H \left(\tilde{K}_j, d, (|d| + 1)^{-\frac{1}{2}} l^{-\frac{j}{d}} \varepsilon \right) \leq \mu_H(\tilde{K}, d, \varepsilon).$$

Damit sind alle Bedingungen von Satz 2.2.2 erfüllt, und wir erhalten für alle $d \in (1, 2]$ die Abschätzung $\dim_H(\tilde{K}) \leq d$. Im Grenzübergang $d \rightarrow 1$ heißt das $\dim_H(\tilde{K}) \leq 1$.

In [21] ist der exakte Dimensionswert der Standard-Cantor-Menge als $\dim_H(\tilde{K}) = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,631$ angegeben worden, so daß wir hier nur eine obere Schranke erhalten.

Im Vergleich zum Satz 1.7.1 sei bemerkt, daß sich hier die Dimensionsschranke 1 für beliebige Parameter $\lambda \in (0, 1)$ erreichen läßt, wogegen Satz 1.7.1 bei analoger Vorgehensweise nur für $\lambda < \frac{1}{3}$ anwendbar ist und in diesem Fall eine größere Schranke $\dim_H(\tilde{K}) \leq 1 - \frac{\ln 3}{\ln \lambda}$ liefert.

2.4.2 Modifizierte Hufeisenabbildungen

Wir betrachten eine Klasse von Abbildungen φ , definiert auf dem Einheitswürfel $Q = [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^n$. Solch eine Abbildung φ soll Q in den ersten $(n - 1)$ Koordinatenrichtungen x_1, \dots, x_{n-1} mit einem Faktor $\alpha < \frac{1}{2}$ stauchen und in der Koordinatenrichtung x_n mit dem Faktor $\beta_1 > 1$ strecken, falls $x_n < h$ gilt, bzw. mit dem Faktor $\beta_2 > \beta_1$, falls $x_n > h$ gilt ($0 < h < 1$). Das entstehende Rechteck wird anschließend an der Hyperebene $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = h\}$ gefaltet und schließlich zu einem n -dimensionalen Hufeisen gebogen. Abb. 2.3 illustriert solch eine Abbildung im zweidimensionalen Fall.

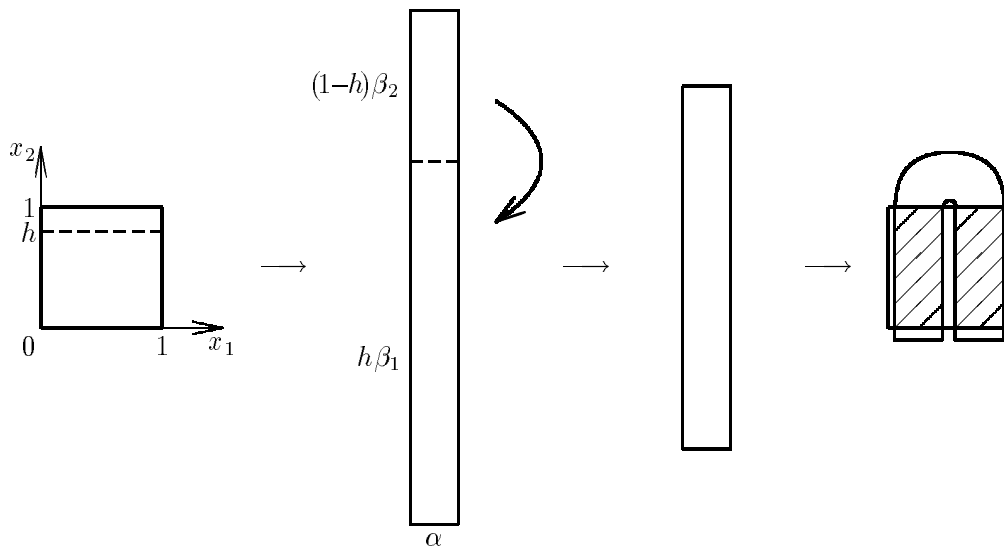


Abbildung 2.3: Eine modifizierte Hufeisenabbildung

Weiterhin nehmen wir an, daß diese Abbildung stetig differenzierbar auf eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ der Menge $K = \bigcap_{i=-\infty}^{\infty} \varphi^i(Q)$ fortgesetzt werden kann.

Bis auf die Faltung entlang der Hyperebene $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = h\}$ gehören solche Abbildungen zur Klasse der Hufeisenabbildungen, die in Abschnitt 3.5.5 eingeführt werden. Wir bezeichnen sie deshalb als modifizierte Hufeisenabbildungen.

Wir werden uns im weiteren auf den in Abb. 2.3 dargestellten zweidimensionalen Fall beschränken und außerdem nur Parameterwerte $\alpha\beta_2 \geq 1$ betrachten, denn in diesem Fall ist das durch φ und K definierte dynamische System nicht dissipativ bezüglich des Lebesgue-Maßes in \mathbb{R}^2 , und somit ist der Satz 1.7.1 nicht anwendbar. Die Menge K ist invariant unter der Abbildung φ . Es sei $K_1 := \{(x, y) \in K \mid x < h\}$ der Teil von K , in dem der Streckungsfaktor von φ den kleineren Wert β_1 annimmt. Für diese Menge gilt $\varphi(K_1) = K$. Iterativ definieren wir $K_j := K_{j-1} \cap \varphi^{-1}(K_{j-1})$ ($j \geq 2$). Induktiv kann man $\varphi(K_{j-1}) = K_j$ zeigen, damit gilt $\varphi^j(K_j) = K = \varphi^j(K)$. Also ist die Bedingung (2.2.4) für beliebige Zahlen $\varepsilon > 0$ und $d \in [0, 2]$ erfüllt. Außerdem besteht jede Menge K_j aus 4^j „linearen Kopien“ von K , die durch horizontale Kontraktion mit dem Faktor α^j , durch vertikale Kontraktion mit dem Faktor $\left(\frac{1}{\beta_1}\right)^j$ und entsprechende Verschiebung erhalten werden. Die so erhaltenen 4^j Teile von K_j sind kompakt und paarweise disjunkt und haben damit einen Mindestabstand $2\varepsilon_j > 0$ zueinander. In einer Überdeckung von K durch Kugeln mit Radien höchstens ε_j kann jede Kugel Punkte aus höchstens einer der 4^j Teilmengen von K_j enthalten. Mit $\gamma = \min\{\alpha, \frac{1}{\beta_1}\}$ erhalten wir daraus für alle $\varepsilon < \varepsilon_j$ und alle $d \in [0, 2]$ die Ungleichung

$$\mu_H(K_j, d, \gamma^j \varepsilon) \leq (4\gamma^d)^j \mu_H(K, d, \varepsilon). \quad (2.4.2)$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0 + 0$ heißt das, daß φ auf K eine $\mu_H(\cdot, d)$ -expandierende Abbildung mit dem Faktor $\frac{1}{4\gamma^d}$ für alle $d \in [0, 2]$ ist.

Wir wollen nun mit Hilfe von Satz 2.2.2 die Hausdorff-Dimension von K nach oben abschätzen. Dazu betrachten wir als erstes die Bedingung (2.2.2). Da wir $\alpha\beta_2 \geq 1$ vorausgesetzt hatten, läßt sich (2.2.2) für $d < 1$ nicht erfüllen. Wir können uns also im weiteren auf den Fall $d \in [1, 2]$ beschränken. In diesem Fall hat (2.2.2) die Form $\beta_2 \alpha^{d-1} < \frac{1}{4\gamma^d}$, das ist äquivalent zu $d > \frac{\ln \alpha - \ln(4\beta_2)}{\ln \alpha + \ln \gamma}$. Für jedes solche d sei eine Zahl $l \in \left(\beta_2 \alpha^{d-1}, \frac{1}{4\gamma^d}\right)$ beliebig gewählt. Dann gilt $l\gamma^d < 1$, also existiert eine Zahl $j_0 \in \mathbb{N}$ mit $(l^{\frac{1}{d}} \gamma)^j < (l + 1)^{-\frac{1}{d}}$ für alle $j > j_0$. Zusammen mit (2.4.2) und der Monotonie von $\mu_H(K_j, d, \cdot)$ heißt das

$$\left(\frac{1}{4\gamma^d}\right)^j \mu_H(K_j, d, (l + 1)^{-\frac{1}{d}} l^{-\frac{j}{d}} \varepsilon) \leq \mu_H(K, d, \varepsilon)$$

für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$. Damit sind alle Bedingungen von Satz 2.2.2 erfüllt, und wir erhalten $\dim_H(K) \leq d$ für alle $d \in \left(\frac{\ln \alpha - \ln(4\beta_2)}{\ln \alpha + \ln \gamma}, 2\right]$ und somit

$$\dim_H(K) \leq \frac{\ln \alpha - \ln(4\beta_2)}{\ln \alpha + \ln \gamma}.$$

Beispielsweise ergibt sich für die Parameter $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta_1 = 3$ und $\beta_2 = 5$ die Abschätzung $\dim_H(K) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\ln 20}{\ln 3} + 1\right) \approx 1,863$.

Dieselbe obere Dimensionsschranke erhalten wir im Fall $\alpha = \frac{1}{\beta_1} = \gamma$ mit Folgerung 2.2.1 mit wesentlich weniger Aufwand, da wir die Bedingung (2.2.3) dann nicht

überprüfen müssen. Da für jedes $j \in \mathbb{N}$ die Menge K_j jeweils aus 4^j „linearen Kopien“ von K besteht, können wir die Abbildung $f_{i,j}$ jeweils als die lineare Abbildung wählen, die die Menge K auf den i -ten Teil von K_j abbildet ($i = 1, \dots, 4^j$). Dann gilt $N_j = 4^j$ und $\omega_d(d_u f_{i,j}) = \gamma^{jd}$ für $d \in [1, 2]$. Für jede beliebige Zahl $a \in [1, \frac{1}{4\gamma^d})$ gilt (2.2.2). Für jede Zahl $l_0 \in (\gamma^d, \frac{1}{4a})$ sind dann die Bedingungen von Folgerung 2.2.1 erfüllt, und wir erhalten im Grenzübergang $a \rightarrow \frac{1}{4\gamma^d}$ die Abschätzung $\dim_H(K) \leq \frac{\ln \alpha - \ln(4\beta_2)}{\ln \alpha + \ln \gamma} = \frac{\ln \alpha - \ln(4\beta_2)}{2 \ln \alpha}$. Daß die Bedingungen der Folgerung 2.2.1 stärker sind als die von Satz 2.2.2, ist an diesem Beispiel daran zu erkennen, daß Folgerung 2.2.1 nur im Fall $\alpha = \frac{1}{\beta_1}$ die gleiche Abschätzung wie Satz 2.2.2 liefert.

Da wir die hier betrachteten modifizierten Hufeisenabbildungen so gewählt haben, daß in der Koordinatenrichtung x_2 zwei verschiedene Streckungsfaktoren β_1 und β_2 wirken, läßt sich durch Verwendung einer Lyapunov-Funktion die obere Schranke für die Hausdorff-Dimension verbessern. Da die Singulärwertfunktion in K_1 und $K \setminus K_1$ jeweils konstant ist, ist die einfachste Form einer sinnvollen Lyapunov-Funktion auch konstant auf K_1 und $K \setminus K_1$. Zwei Lyapunov-Funktionen, die sich um einen konstanten Faktor unterscheiden, liefern dieselbe Dimensionsabschätzung. Also können wir

$$p(u) = \begin{cases} 1 & \text{für alle } u \in K_1, \\ P & \text{für alle } u \in K \setminus K_1 \end{cases}$$

mit einer positiven Konstante P annehmen. Da K_1 und $K \setminus K_1$ zwei disjunkte kompakte Mengen sind, ist eine solche Funktion p stetig auf K . Die Konstante P muß nun so gewählt werden, daß $\sup_{u \in K} \left(\frac{p(\varphi(u))}{p(u)} \omega_d(d_u \varphi) \right)$ minimal wird. Für $d \in [1, 2]$ gilt

$$\frac{p(\varphi(u))}{p(u)} \omega_d(d_u \varphi) = \begin{cases} \frac{1}{P} \beta_2 \alpha^{d-1} & \text{für alle } u \in K \setminus K_1, \\ P \beta_1 \alpha^{d-1} & \text{für alle } u \in K, \varphi(u) \in K \setminus K_1, \\ \beta_1 \alpha^{d-1} & \text{für alle } u \in K, \varphi(u) \in K_1. \end{cases}$$

Für ein optimales P muß also $\frac{1}{P} \beta_2 = \frac{1}{P} \beta_1$ gelten und damit $P = \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}$. Mit der so gewählten Lyapunov-Funktion gilt $\sup_{u \in K} \left(\frac{p(\varphi(u))}{p(u)} \omega_d(d_u \varphi) \right) = \sqrt{\beta_1 \beta_2} \alpha^{d-1}$. Dieser Wert ist kleiner als $\sup_{u \in K} \omega_d(d_u \varphi) = \beta_2 \alpha^{d-1}$. Für jede Zahl $d > \frac{\ln \alpha - \ln(4\sqrt{\beta_1 \beta_2})}{\ln \alpha + \ln \gamma}$ sind die Bedingungen von Satz 2.3.1 erfüllt, und wir erhalten die verbesserte Abschätzung

$$\dim_H(K) \leq \frac{\ln \alpha - \ln(4\sqrt{\beta_1 \beta_2})}{\ln \alpha + \ln \gamma}.$$

Für die Parameterwerte $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta_1 = 3$ und $\beta_2 = 5$ zum Beispiel gilt somit $\dim_H(K) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\ln(4\sqrt{15})}{\ln 3} + 1 \right) \approx 1,747$.

Kapitel 3

Dimensionsabschätzungen mit Hilfe der Vielfachheitsfunktion

Dieses Kapitel befaßt sich mit allgemeinen nicht injektiven Abbildungen. Die Vielfachheitsfunktion einer Abbildung, die zu einem Punkt und einer Teilmenge des Definitionsbereiches jeweils die Anzahl der Urbilder in dieser Menge angibt, kann gewinnbringend in die Douady-Oesterlé-Methode zur Dimensionsabschätzung einbezogen werden und führt zur Abschwächung der Kontraktionsbedingung für die Singulärwerte der Tangentialabbildung. Eine Kurzfassung dieser Vorgehensweise ist in [25] dargestellt.

Die Beispiele zeigen, daß sich auch eine Reihe injektiver Abbildungen, wie Hufeisenabbildungen oder Belykh-Abbildungen, auf nicht injektive Abbildungen zurückführen läßt, so daß auch für solche Abbildungen verbesserte Oberschranken der Hausdorff-Dimension der invarianten Menge erreicht werden können.

3.1 Die Vielfachheitsfunktion einer Abbildung

Die Vielfachheitsfunktion einer Abbildung wurde z. B. in [23] eingeführt. Sie gibt zu einem gegebenen Punkt u und einer gegebenen Menge K die Anzahl der in K liegenden Urbilder von u unter der Abbildung φ an und ist damit ein Maß für die Nichtinjektivität.

Definition 3.1.1 *Es seien M_1 und M_2 beliebige Mengen und $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ eine Abbildung. Die **Vielfachheitsfunktion** $N(\varphi, K, u)$ der Abbildung φ bezüglich einer Teilmenge $K \subset M_1$ im Punkt $u \in M_2$ ist definiert als die Mächtigkeit der Menge $\{v \in K \mid \varphi(v) = u\}$.*

Im weiteren werden wir C^1 -Abbildungen $\varphi : M \rightarrow M$ auf hinreichend glatten n -dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeiten (M, g) betrachten. Wenn die zu-

grundliegende Mannigfaltigkeit orientierbar ist und die Determinante $\det d_u\varphi$ der Linearisierung der gegebenen Abbildung auf der gesamten Menge positiv ist, stimmt die Vielfachheitsfunktion mit dem lokalen Abbildungsgrad überein (siehe z. B. [16, 68]).

In dieser Arbeit soll die Einbeziehung der Vielfachheitsfunktion in Dimensionsabschätzungen invarianter Mengen von C^1 -Abbildungen auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten demonstriert werden. Deshalb wird im folgenden die Vielfachheitsfunktion von Abbildungen $\varphi : U \rightarrow M$, definiert auf einer offenen Teilmenge U einer Riemannschen C^1 -Mannigfaltigkeit (M, g) , genauer untersucht.

Bemerkung 3.1.1 Die Vielfachheitsfunktion einer Abbildung muß nicht unbedingt endliche Werte liefern. Es kann aber gezeigt werden, daß für C^1 -Abbildungen φ ohne kritische Punkte auf kompakten Teilmengen K von n -dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeiten eine obere Schranke für die Vielfachheitsfunktion existiert. Wir werden im weiteren immer voraussetzen, daß $|\det(d_u\varphi)| > 0$ für alle Punkte $u \in K$ gilt. Unter dieser Bedingung gibt es für C^1 -Abbildungen in \mathbb{R}^n Zusatzbedingungen, so daß die Abbildung dann sogar ein C^1 -Diffeomorphismus, also auch invertierbar ist. In [53] wird zum Beispiel gezeigt, daß für eine C^1 -Abbildung $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, definiert auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$, und eine kompakte Menge $K \subset U$, die keine kritischen Punkte enthält, unter der Voraussetzung, daß φ auf dem Rand von K injektiv ist, die Abbildung dann sogar auf ganz K injektiv ist. Wir möchten hier bemerken, daß Dimensionsabschätzungen nur dann sinnvoll sind, wenn die betrachtete Menge keine inneren Punkte enthält, da Mengen mit inneren Punkten immer die Dimension der zugrundeliegenden Mannigfaltigkeit besitzen. Also stimmt der Rand von K in allen hier relevanten Fällen mit K überein. Die Einschränkung auf Mengen ohne kritische Punkte ist damit nicht gleichbedeutend damit, daß unter geringen Zusatzvoraussetzungen an die Abbildung die Nichtinjektivität verloren geht.

Wir wollen nun die Vielfachheitsfunktion einer Abbildung φ auf kompakten Mengen ohne bezüglich φ kritische Punkte analysieren. Dazu benötigen wir die folgende Hilfsaussage:

Lemma 3.1.1 *Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^1 -Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ eine offene Menge, $\varphi : U \rightarrow M$ eine C^1 -Abbildung und $K \subset U$ eine kompakte Menge, so daß $|\det(d_u\varphi)| > 0$ für alle $u \in K$ gilt. Dann existiert ein $\varepsilon_K > 0$, so daß für alle $u \in K$ die eingeschränkte Abbildung $\varphi|_{B(u, \varepsilon_K)}$ ein C^1 -Diffeomorphismus ist.*

Beweis Zunächst sei $\varepsilon > 0$ so klein gewählt, daß für alle $u \in K$ die Kugel $B(u, \varepsilon)$ vollständig in U enthalten ist. Wegen $|\det(d_u\varphi)| > 0$ für alle $u \in K$ liefert der Satz über die implizite Funktion (siehe z. B. [34]), daß für jedes $u \in K$ eine Zahl $0 < \varepsilon_u \leq \varepsilon$ existiert, so daß $\varphi|_{B(u, \varepsilon_u)}$ ein C^1 -Diffeomorphismus ist. Das Mengensystem $\{B(u, \varepsilon_u)\}$

ist eine offene Überdeckung der kompakten Menge K . Also existiert eine endliche Teilüberdeckung $\{B(u_i, \varepsilon_{u_i})\}_{i=1}^p$ mit einer gewissen natürlichen Zahl p .

Nun zeigen wir indirekt, daß ein $\varepsilon_K > 0$ existiert, so daß für alle $u \in K$ die Kugel $B(u, \varepsilon_K)$ vollständig in einer der Kugeln $B(u_i, \varepsilon_{u_i})$ ($i = 1, \dots, p$) enthalten ist. Da $\varphi|_{B(u_i, \varepsilon_{u_i})}$ jeweils ein C^1 -Diffeomorphismus ist, ist dann auch $\varphi|_{B(u, \varepsilon_K)}$ ein C^1 -Diffeomorphismus. Angenommen, es gibt kein solches $\varepsilon_K > 0$, dann existiert eine Folge von Punkten $\{v_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset K$ mit

$$\max_{i: v_j \in B(u_i, \varepsilon_{u_i})} (\varepsilon_{u_i} - \varrho(v_j, u_i)) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0. \quad (3.1.1)$$

Da der mögliche Bereich für i endlich ist, enthält die Folge $\{v_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge $\{v_{j_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, so daß das Maximum immer für ein festes i_0 angenommen wird, d. h.

$$(\varepsilon_{u_{i_0}} - \varrho(v_{j_k}, u_{i_0})) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Da $\{v_{j_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset K$ gilt und K kompakt ist, enthält $\{v_{j_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $\{v_{j_{k_l}}\}_{l \in \mathbb{N}}$, und für den Grenzwert $v \in K$ dieser Folge gilt

$$\varepsilon_{u_{i_0}} - \varrho(v, u_{i_0}) = 0.$$

Somit ist $v \notin B(u_{i_0}, \varepsilon_{u_{i_0}})$, also muß ein $i_v \in \{1, \dots, p\}$ existieren mit $i_v \neq i_0$ und $v \in B(u_{i_v}, \varepsilon_{u_{i_v}})$. Damit gilt $\varrho(v, u_{i_v}) < \varepsilon_{u_{i_v}}$, und für die Folge $\{v_{j_{k_l}}\}_{l \in \mathbb{N}}$ existiert ein Index l_0 mit $\varrho(v, v_{j_{k_l}}) < \frac{\varepsilon_{u_{i_v}} - \varrho(v, u_{i_v})}{2}$ für alle $l > l_0$. Für diese l gilt dann auch $v_{j_{k_l}} \in B(u_{i_v}, \varepsilon_{u_{i_v}})$ und

$$\varepsilon_{u_{i_v}} - \varrho(v_{j_{k_l}}, u_{i_v}) \geq \frac{\varepsilon_{u_{i_v}} - \varrho(v, u_{i_v})}{2},$$

im Widerspruch zu (3.1.1). ■

Lemma 3.1.2 *Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^1 -Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ eine offene Menge, $\varphi : U \rightarrow M$ eine C^1 -Abbildung und $K \subset U$ eine kompakte Menge, so daß $|\det(d_u \varphi)| > 0$ für alle $u \in K$ gilt. Dann ist $N(\varphi, K, v)$ auf M nach oben beschränkt, d. h., es gibt eine Zahl $k \in \mathbb{N}$, so daß $N(\varphi, K, v) \leq k$ für alle $v \in M$ gilt.*

Beweis Nach Lemma 3.1.1 existiert eine Zahl $\varepsilon_K > 0$, so daß $\varphi|_{B(u, \varepsilon_K)}$ ein C^1 -Diffeomorphismus für alle $u \in K$ ist. Das Mengensystem $\{B(u, \varepsilon_K)\}_{u \in K}$ ist eine offene Überdeckung der kompakten Menge K und enthält somit eine endliche Teilüberdeckung $\{B(u_1, \varepsilon_K), \dots, B(u_k, \varepsilon_K)\}$ mit einer bestimmten Zahl $k \in \mathbb{N}$. Da $\varphi|_{B(u_i, \varepsilon_K)}$ für jedes $i = 1, \dots, k$ ein Diffeomorphismus ist, kann jeder Punkt $v \in M$ in jeder der Mengen $B(u_i, \varepsilon_K)$ ($i = 1, \dots, k$) höchstens ein Urbild haben. Damit gilt $N(\varphi, K, v) \leq k$ für jedes $v \in M$. ■

Unter den Voraussetzungen von Lemma 3.1.2 ist damit $N(\varphi, K, u)$ für Punkte $u \in \varphi(K)$ eine von Null verschiedene natürliche Zahl, also sind Ausdrücke der Form $\frac{1}{N(\varphi, K, u)}$ sinnvoll. Für die Betrachtung von Iterierten einer gegebenen Abbildung ist die folgende Aussage wichtig:

Lemma 3.1.3 *Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^1 -Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ eine offene Menge, $\varphi : U \rightarrow M$ eine C^1 -Abbildung und $K \subset U$ eine kompakte φ -invariante Menge, so daß $|\det(d_u \varphi)| > 0$ für alle $u \in K$ gilt. Dann gilt für jedes $v \in K$ und jedes $p \in \mathbb{N}$ die Gleichung*

$$\sum_{u \in K: \varphi^p(u) = v} \left(\prod_{i=1}^p \frac{1}{N(\varphi, K, \varphi^i(u))} \right) = 1.$$

Beweis Diese Aussage kann durch vollständige Induktion bewiesen werden. Für $p = 1$ gilt

$$\sum_{u \in K: \varphi(u) = v} \frac{1}{N(\varphi, K, v)} = N(\varphi, K, v) \frac{1}{N(\varphi, K, v)} = 1.$$

Wir nehmen nun an, daß die Aussage für ein $p \in \mathbb{N}$ gilt. Dann erhalten wir für $p + 1$

$$\begin{aligned} & \sum_{u \in K: \varphi^{p+1}(u) = v} \left(\prod_{i=1}^{p+1} \frac{1}{N(\varphi, K, \varphi^i(u))} \right) \\ &= \sum_{u \in K: \varphi^{p+1}(u) = v} \left(\frac{1}{N(\varphi, K, v)} \prod_{i=1}^p \frac{1}{N(\varphi, K, \varphi^i(u))} \right) \\ &= \frac{1}{N(\varphi, K, v)} \sum_{w \in K: \varphi(w) = v} \sum_{u \in K: \varphi^p(u) = w} \left(\prod_{i=1}^p \frac{1}{N(\varphi, K, \varphi^i(u))} \right). \end{aligned}$$

Da wir $\sum_{u \in K: \varphi^p(u) = w} \left(\prod_{i=1}^p \frac{1}{N(\varphi, K, \varphi^i(u))} \right) = 1$ vorausgesetzt hatten, gilt

$$\sum_{u \in K: \varphi^{p+1}(u) = v} \left(\prod_{i=1}^{p+1} \frac{1}{N(\varphi, K, \varphi^i(u))} \right) = \frac{1}{N(\varphi, K, v)} N(\varphi, K, v) = 1.$$

Also ist die Behauptung auch für $p + 1$ erfüllt. ■

Obwohl die in dieser Arbeit betrachteten C^1 -Abbildungen φ als nicht injektive Abbildungen im allgemeinen keine Diffeomorphismen sind, sollen im weiteren auch Umkehrfunktionen betrachtet werden. Nach Lemma 3.1.1 ist das lokal immer möglich, nur müssen in einem Punkt $u \in \varphi(K)$ immer $N(\varphi, K, \varphi(u))$ verschiedene Umkehrabbildungen betrachtet werden. Diese sind dann jeweils auf einer gewissen Umgebung

des Punktes definiert. Wendet man diese Umkehrabbildungen auf eine gesamte Umgebung des Punktes an, dann ist im allgemeinen nicht garantiert, daß alle Urbilder dieser Umgebung unter der Abbildung φ erreicht werden. Ein Grund dafür ist unter anderem, daß die Vielfachheitsfunktion nicht unbedingt stetig ist, daß es also in einer Umgebung eines Punktes einen Punkt mit mehr Urbildern geben kann. Das folgende Beispiel zeigt eine Abbildung mit unstetiger Vielfachheitsfunktion.

Beispiel 3.1.1 Wir betrachten als Mannigfaltigkeit \mathbb{R} mit der Euklidischen Metrik und die stückweise lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$\varphi(u) = \begin{cases} 2u & \text{für } u \leq \frac{7}{12}, \\ 2u - \frac{4}{3} & \text{für } u > \frac{7}{12}. \end{cases}$$

Der Graph dieser Abbildung ist in Abb. 3.1 dargestellt. Auf jeder offenen Menge

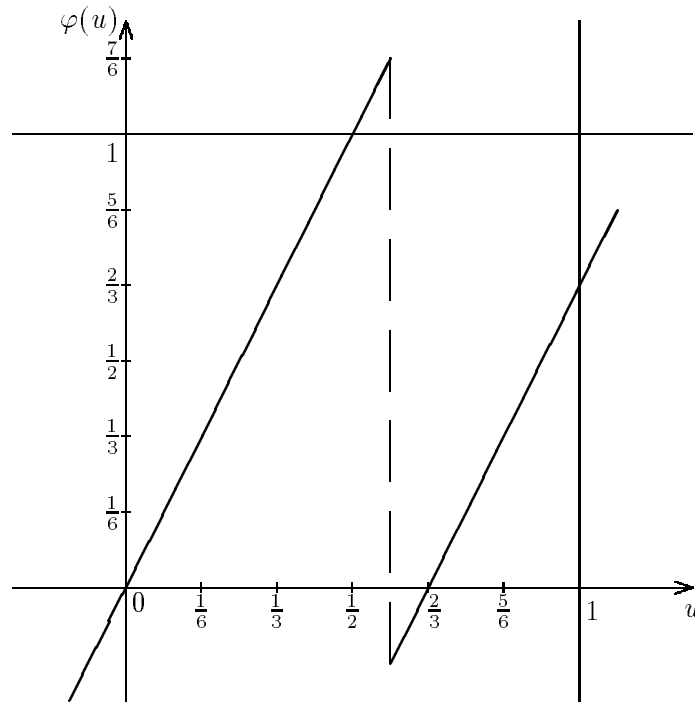


Abbildung 3.1: Beispiel einer Abbildung mit unstetiger Vielfachheitsfunktion

$U \subset \mathbb{R}$, die den Punkt $\frac{7}{12}$ nicht enthält, ist φ eine C^1 -Abbildung. Es bezeichne K die maximale invariante Menge dieser Abbildung im Intervall $[0, 1]$. Dann gilt $K = \bigcap_{p=0}^{\infty} \varphi^{-p}([0, 1]) = \bigcap_{p=0}^{\infty} K_p$ mit $K_p := \bigcap_{j=0}^p \varphi^{-j}([0, 1])$. Es ist $K_0 = [0, 1]$, $K_1 = [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, $K_2 = [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{11}{12}] \cup \{1\}$ und so weiter. Dabei ergeben sich iterativ $K_p \cap [0, \frac{1}{2}]$ aus allen Punkten $u \in [0, 1]$, für die $2u \in K_{p-1}$ gilt, und $K_p \cap [\frac{2}{3}, \frac{11}{12}]$ aus

allen Punkten $u \in [0, 1]$, für die $(4u - \frac{8}{3}) \in K_{p-2}$ gilt ($p = 2, 3, \dots$). Im Grenzübergang $p \rightarrow \infty$ erhalten wir daraus die Beziehungen

$$K \cap [0, \frac{1}{2}] = \{u \in [0, 1] \mid 2u \in K\},$$

$$K \cap [\frac{2}{3}, \frac{11}{12}] = \{u \in [0, 1] \mid (4u - \frac{8}{3}) \in K\},$$

$$K = (K \cap [0, \frac{1}{2}]) \cup (K \cap [\frac{2}{3}, \frac{11}{12}]) \cup \{1\}.$$

Die Menge K entsteht also als eine Cantorartige Menge ausgehend vom Intervall $[0, 1]$, indem in jedem Schritt jedes Intervall $[a, b]$ positiver Länge durch

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b, \frac{1}{12}a + \frac{11}{12}b\right] \cup \{b\}$$

ersetzt wird. Der Punkt $\frac{2}{3}$ ist damit Häufungspunkt von K . Es existiert eine Folge $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset K$ mit $u_i > \frac{2}{3}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i = \frac{2}{3}$. Der Punkt $\frac{2}{3}$ hat, wie aus Abb. 3.1 ersichtlich ist, zwei Urbilder $\frac{1}{3}$ und 1, die beide in K liegen. Also ist $N(\varphi, K, \frac{2}{3}) = 2$. Für alle u_i gilt aber wegen $u_i > \frac{2}{3}$ offensichtlich $N(\varphi, K, u_i) = 1$ ($i \in \mathbb{N}$). Damit ist die Vielfachheitsfunktion $N(\varphi, K, \cdot)$ von φ bezüglich K im Punkt $\frac{2}{3}$ nicht stetig. \square

Abhilfe für dieses Problem schafft die Betrachtung einer offenen Menge \tilde{U} , die K enthält. Um trotzdem Aussagen für kompakte Mengen anwenden zu können, wird weiterhin gefordert, daß $\text{cl}(\tilde{U}) \subset U$ kompakt ist, wobei $\text{cl}(\cdot)$ den Abschluß der entsprechenden Menge bezeichne. Im weiteren werden die Eigenschaften der Vielfachheitsfunktion bezüglich dieser Menge \tilde{U} untersucht.

Betrachtet man die Anzahl der Urbilder in \tilde{U} , dann hat unter der Zusatzforderung $\varphi^{-1}(\tilde{U}) \subset \tilde{U}$ jeder Punkt aus \tilde{U} mindestens ein Urbild in \tilde{U} . Deshalb sind Ausdrücke der Form $\frac{1}{N(\varphi, \tilde{U}, u)}$ für $u \in \tilde{U}$ sinnvoll. Für die Iteration der Abbildung φ betrachten wir wieder Produkte dieser Ausdrücke.

Lemma 3.1.4 *Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^1 -Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ eine offene Menge, $\varphi : U \rightarrow M$ eine C^1 -Abbildung und \tilde{U} eine offene Menge, so daß $\text{cl}(\tilde{U}) \subset U$ kompakt ist, $|\det(d_u \varphi)| > 0$ für alle $u \in \text{cl}(\tilde{U})$ und $\varphi^{-1}(\tilde{U}) \subset \tilde{U}$ gilt. Dann gilt für jedes $p \in \mathbb{N}$ und jedes $v \in \tilde{U}$ die Gleichung*

$$\sum_{u \in \tilde{U}, \varphi^p(u) = v} \prod_{i=1}^p \frac{1}{N(\varphi, \tilde{U}, \varphi^i(u))} = 1.$$

Beweis Dieses Lemma kann analog zu Lemma 3.1.3 bewiesen werden, indem K durch \tilde{U} ersetzt wird. Im Induktionsschritt ist zu beachten, daß aufgrund von $\varphi^{-1}(\tilde{U}) \subset \tilde{U}$ jeder Punkt w mit $\varphi(w) = v$ ($v \in \tilde{U}$) auch in \tilde{U} liegen muß. ■

In einem Punkt $u \in \tilde{U}$ gibt es $N(\varphi, \tilde{U}, u)$ verschiedene Umkehrfunktionen zu φ , die im weiteren mit $\varphi_{u,j}^{-1}$ ($j = 1, \dots, N(\varphi, \tilde{U}, u)$) bezeichnet werden. Das folgende Lemma garantiert dann, daß es eine vom Punkt u unabhängige Zahl $\eta\varepsilon$ gibt, so daß diese Umkehrfunktionen jeweils auf der Umgebung $B(u, \eta\varepsilon)$ existieren.

Lemma 3.1.5 *Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^1 -Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ eine offene Menge, $\varphi : U \rightarrow M$ eine C^1 -Abbildung und \tilde{U} eine offene Menge, so daß $\text{cl}(\tilde{U}) \subset U$ kompakt ist und $|\det(d_u\varphi)| > 0$ für alle $u \in \text{cl}(\tilde{U})$ gilt. Weiterhin sei $\eta \in (0, \inf_{u \in \tilde{U}} \alpha_n(d_u\varphi))$ beliebig. Dann existiert eine hinreichend kleine Zahl $\varepsilon > 0$ mit*

$$B(\varphi(u), \eta r) \subset \varphi(B(u, r))$$

für alle $u \in \tilde{U}$ und alle $r \in (0, \varepsilon]$.

Beweis Da $\text{cl}(\tilde{U})$ kompakt ist und $|\det(d_u\varphi)| > 0$ für alle $u \in \text{cl}(\tilde{U})$ gilt, ist $\inf_{u \in \tilde{U}} \alpha_n(d_u\varphi) > 0$ und somit das Intervall für η nichtleer. Es sei $\eta' := \inf_{u \in \tilde{U}} \alpha_n(d_u\varphi) - \eta > 0$, und $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{\text{cl}(\tilde{U})})$ mit der in Lemma 3.1.1 definierten Zahl $\varepsilon_{\text{cl}(\tilde{U})}$ sei hinreichend klein gewählt, so daß ε kleiner als das in Satz 1.3.4 eingeführte ε_0 ist und es eine offene Menge \bar{V} mit $\text{cl}(\tilde{U}) \subset \bar{V} \subset U$ gibt, bezüglich der

$$\|\tau_{\varphi(v)}^{\varphi(u)} d_v \varphi \tau_u^v - d_u \varphi\| \leq \eta'$$

für alle $u, v \in \bar{V}$ mit $\varrho(u, v) \leq \varepsilon$ gilt und außerdem jede Kugel $B(u, \varepsilon)$ um einen Punkt $u \in \tilde{U}$ vollständig in \bar{V} enthalten ist. Dann ist die Abbildung φ für alle $u \in \tilde{U}$ jeweils auf der gesamten Kugel $B(u, \varepsilon)$ erklärt. Aufgrund der Taylor-Formel (siehe Satz 1.3.4) für die differenzierbare Abbildung φ gilt dann für jedes $u \in \tilde{U}$ und jedes $v \in B(u, \varepsilon)$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} & \|\exp_{\varphi(u)}^{-1} \varphi(v) - d_u \varphi(\exp_u^{-1}(v))\| \\ & \leq \sup_{w \in B(u, \varepsilon)} \|\tau_{\varphi(w)}^{\varphi(u)} d_w \varphi \tau_u^w - d_u \varphi\| \cdot \|\exp_u^{-1}(v)\|. \end{aligned}$$

Damit ist für jedes $r \in (0, \varepsilon]$

$$B(O_{\varphi(u)}, \eta r) \subset \exp_{\varphi(u)}^{-1}(\varphi(B(u, r)))$$

und somit

$$B(\varphi(u), \eta r) \subset \varphi(B(u, r))$$

erfüllt. ■

Die folgende Aussage verdeutlicht die Notwendigkeit der Einführung der offenen Menge \tilde{U} , die die eigentlich interessierende Menge K enthält: Wenn wir in einem Punkt $u \in \varphi(\tilde{U})$ die lokalen Umkehrabbildungen $\varphi_{u,j}^{-1}$ ($j = 1, \dots, N(\varphi, \tilde{U}, u)$) auf eine hinreichend kleine Kugel um u anwenden, dann sind mit den Bildern der Kugel unter diesen Umkehrabbildungen auf jeden Fall alle Urbilder der Kugel unter der Abbildung φ in K überdeckt.

Lemma 3.1.6 *Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^1 -Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ eine offene Menge, $\varphi : U \rightarrow M$ eine C^1 -Abbildung, $K \subset U$ eine kompakte Menge und $\tilde{U} \supset K$ eine offene Menge, so daß $\text{cl}(\tilde{U}) \subset U$ kompakt ist und $|\det(d_u \varphi)| > 0$ für alle $u \in \text{cl}(\tilde{U})$ gilt. Dann existiert eine hinreichend kleine Zahl $\delta > 0$ mit*

$$\varphi^{-1}(B(u, r)) \cap K \subset \bigcup_{j=1}^{N(\varphi, \tilde{U}, u)} \varphi_{u,j}^{-1}(B(u, r))$$

für alle $u \in \varphi(\tilde{U})$ und alle $r \in (0, \delta)$.

Beweis Aufgrund von Lemma 3.1.5 gibt es Zahlen $\eta > 0$ und $\varepsilon > 0$, so daß für jedes $v \in K$ und jedes $\bar{r} \in (0, \varepsilon)$ die Beziehung

$$B(\varphi(v), \eta \bar{r}) \subset \varphi(B(v, \bar{r}))$$

gilt. Außerdem kann ε so klein gewählt werden, daß $\varepsilon < \varepsilon_{\text{cl}(\tilde{U})}$ mit der in Lemma 3.1.1 definierten Zahl $\varepsilon_{\text{cl}(\tilde{U})}$ und $B(\varphi(v), \eta \varepsilon) \subset \tilde{U}$ für jedes $v \in K$ gilt. Nun setzen wir $\delta := \eta \varepsilon$ und wählen einen beliebigen Punkt $u \in \varphi(\tilde{U})$, ein $r = \eta \bar{r}$ mit $\bar{r} < \varepsilon$ und einen beliebigen Punkt $v \in \varphi^{-1}(B(u, r)) \cap K$. Dann muß wegen $u \in B(\varphi(v), r)$ eines der in \tilde{U} gelegenen Urbilder u_j von u unter φ in der Kugel $B(v, \bar{r})$ liegen. Aufgrund von $\varphi(v) \in B(u, r)$ und Lemma 3.1.5 ist $\varphi_{u,j}^{-1}(\varphi(v)) \in B(u_j, \varepsilon_{\text{cl}(\tilde{U})})$, und da $\varphi|_{B(u_j, \varepsilon_{\text{cl}(\tilde{U})})}$ wegen Lemma 3.1.1 ein Diffeomorphismus ist, muß $v = \varphi_{u,j}^{-1}(\varphi(v))$ gelten. Also ist $v \in \bigcup_{j=1}^{N(\varphi, \tilde{U}, u)} \varphi_{u,j}^{-1}(B(u, r))$. ■

Wie in Beispiel 3.1.1 erläutert, ist die Vielfachheitsfunktion einer Abbildung bezüglich einer kompakten Menge K im allgemeinen nicht stetig. Für die Vielfachheitsfunktion bezüglich der offenen Menge \tilde{U} gilt jedoch die folgende Aussage:

Lemma 3.1.7 *Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^1 -Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ eine offene Menge, $\varphi : U \rightarrow M$ eine C^1 -Abbildung, $K \subset U$ eine kompakte Menge und $\tilde{U} \supset K$ eine offene Menge, so daß $\text{cl}(\tilde{U}) \subset U$ kompakt ist, $|\det(d_u \varphi)| > 0$*

für alle $u \in \text{cl}(\tilde{U})$, $\varphi(\tilde{U}) \subset \tilde{U}$ und $\varphi^p(K) \subset \tilde{U}$ für alle $p \in \mathbb{N}$ gilt. Dann gibt es für jedes $p \in \mathbb{N}$ eine Zahl $\varepsilon_p > 0$, so daß für alle $u \in \tilde{U}$ mit $\varphi^p(u) \in \varphi^p(K)$ und alle $v \in B(u, \varepsilon_p)$ mit $\varphi^p(v) \in \varphi^p(K)$ die Gleichung

$$\prod_{i=1}^p \frac{1}{N(\varphi, \tilde{U}, \varphi^i(v))} = \prod_{i=1}^p \frac{1}{N(\varphi, \tilde{U}, \varphi^i(u))}$$

gilt.

Beweis Dieses Lemma kann wieder durch vollständige Induktion bewiesen werden. Für $p = 1$ ist $N(\varphi, \tilde{U}, v) = N(\varphi, \tilde{U}, u)$ für hinreichend nahe beieinander liegende Punkte $u, v \in \varphi^p(K)$ zu zeigen. Wir betrachten einen beliebigen Punkt $u \in \varphi^p(K)$. Dieser Punkt hat unter der Abbildung φ die Urbilder u_j ($j = 1, \dots, N(\varphi, \tilde{U}, u)$) in \tilde{U} . Nach Lemma 3.1.5 gibt es Zahlen $\eta, \varepsilon > 0$ mit $B(u, \eta\varepsilon) \subset \varphi(B(u_j, \varepsilon))$ ($j = 1, \dots, N(\varphi, \tilde{U}, u)$), und diese Zahlen können unabhängig vom Punkt u so klein gewählt werden, daß die Kugeln $B(u, \eta\varepsilon)$ und $B(u_j, \varepsilon)$ vollständig in \tilde{U} liegen, die Abbildung $\varphi|_{B(u_j, \varepsilon)}$ jeweils ein Diffeomorphismus ist und die Kugeln $B(u_j, \varepsilon)$ paarweise disjunkt sind. Dann hat jeder Punkt $v \in B(u, \eta\varepsilon)$ in jeder der Kugeln $B(u_j, \varepsilon)$ genau ein Urbild, das in \tilde{U} liegt, also gilt $N(\varphi, \tilde{U}, v) \geq N(\varphi, \tilde{U}, u)$ für alle $v \in B(u, \eta\varepsilon)$. Durch Vertauschung von u und v erhält man $N(\varphi, \tilde{U}, v) \leq N(\varphi, \tilde{U}, u)$. Damit gilt die Behauptung für $p = 1$ mit $\varepsilon_1 = \eta\varepsilon$.

Nun nehmen wir an, daß die Behauptung für ein $p \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Für $p+1$ betrachten wir Punkte $u, v \in \tilde{U}$ mit $\varphi^{p+1}(u), \varphi^{p+1}(v) \in \varphi^{p+1}(K)$. Dann gilt

$$\prod_{i=1}^{p+1} \frac{1}{N(\varphi, \tilde{U}, \varphi^i(v))} = \frac{1}{N(\varphi, \tilde{U}, \varphi(v))} \cdot \prod_{i=2}^{p+1} \frac{1}{N(\varphi, \tilde{U}, \varphi^i(v))}.$$

Wegen $\varphi^{-1}(\tilde{U}) \subset \tilde{U}$ liegen $\varphi(u)$ und $\varphi(v)$ in \tilde{U} , da sie Urbilder von Punkten aus $\varphi^{p+1}(K)$ unter der Abbildung φ^p sind. Damit kann die Induktionsvoraussetzung auf die Punkte $\varphi(u), \varphi(v)$ angewendet werden. Somit erhalten wir $\prod_{i=2}^{p+1} \frac{1}{N(\varphi, \tilde{U}, \varphi^i(v))} = \prod_{i=2}^{p+1} \frac{1}{N(\varphi, \tilde{U}, \varphi^i(u))}$, falls $\varphi(v) \in B(\varphi(u), \varepsilon_p)$ gilt. Da φ auf der kompakten Menge $\text{cl}(\tilde{U})$ eine C^1 -Abbildung ist, gibt es eine Zahl $a > 0$ mit $\varrho(\varphi(u), \varphi(v)) \leq a\varrho(u, v)$. Damit ist $\varrho(\varphi(u), \varphi(v)) < \varepsilon_p$ für $\varrho(u, v) < \frac{\varepsilon_p}{a}$ garantiert.

Weiterhin liefert der Induktionsanfang eine Zahl ε_1 , so daß $\frac{1}{N(\varphi, \tilde{U}, \varphi(v))} = \frac{1}{N(\varphi, \tilde{U}, \varphi(u))}$ für alle $v \in B(u, \varepsilon_1)$ mit $\varphi(v) \in \varphi^{-p}(K)$ gilt.

Damit gilt mit $\varepsilon_{p+1} := \min\{\frac{\varepsilon_p}{a}, \varepsilon_1\}$ für alle $v \in B(u, \varepsilon_{p+1})$ mit $\varphi^{p+1}(v) \in K$ sowohl $\prod_{i=1}^p \frac{1}{N(\varphi, \tilde{U}, \varphi^i(v))} = \prod_{i=1}^p \frac{1}{N(\varphi, \tilde{U}, \varphi^i(u))}$ als auch $\frac{1}{N(\varphi, \tilde{U}, \varphi^{p+1}(v))} = \frac{1}{N(\varphi, \tilde{U}, \varphi^{p+1}(u))}$ und damit die Behauptung für $p+1$. ■

Bemerkung 3.1.2 Die Vielfachheitsfunktion einer Abbildung geht in Transformationsformeln für Integrale ein, wenn es sich nicht wie in (1.5.1) und (1.5.2) um Diffeomorphismen, sondern um differenzierbare Abbildungen handelt, die nicht notwendigerweise injektiv sind. Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^1 -Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ eine offene Menge, $\varphi : U \rightarrow M$ eine C^1 -Abbildung, $K \subset U$ eine kompakte Menge ohne kritische Punkte bezüglich φ und ρ eine Dichte auf M . Dann ist nach [68] die Vielfachheitsfunktion $N(\varphi, K, \cdot)$ genau dann bezüglich ρ über $\varphi(K)$ integrierbar, wenn die Konstante 1 bezüglich $\varphi^*\rho$ über K integrierbar ist, und es gilt, analog zu (1.5.1), $\int_{\varphi(K)} N(\varphi, K, \cdot) \rho = \int_K \varphi^*\rho$. Da es nach Lemma 3.1.2 eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit $N(\varphi, K, v) \leq k$ für alle $v \in \varphi(K)$ gibt, können wir die Menge K in endlich viele Teilmengen K_1, \dots, K_k so zerlegen, daß $N(\varphi, K, v) = i$ für alle $v \in \varphi(K_i)$ ($i = 1, \dots, k$) ist. Für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ gilt dann $N(\varphi, K_i, v) = N(\varphi, K, v) = i$ für alle $v \in \varphi(K_i)$. Also ist $\rho_i := \frac{\rho}{N(\varphi, K_i, \cdot)}$ auf $\varphi(K_i)$ eine Dichte. Für diese Dichte gilt $\int_{\varphi(K_i)} N(\varphi, K_i, \cdot) \rho_i = \int_{K_i} \varphi^*\rho_i$ und damit $\int_{\varphi(K_i)} \rho = \int_{K_i} \frac{1}{N(\varphi, K_i, \cdot)} \varphi^*\rho$ ($i = 1, \dots, k$), vorausgesetzt, daß alle diese Integrale existieren. Aus der Additivität des Integrals folgt daraus $\int_{\varphi(K)} \rho = \int_K \frac{1}{N(\varphi, K, \cdot)} \varphi^*\rho$. Betrachtet man wieder speziell das Volumenelement $|dM|$ der Riemannschen Mannigfaltigkeit, so ergibt sich, analog zu (1.5.2),

$$\int_{\varphi(K)} |dM| = \int_K \frac{|\det(d\varphi)|}{N(\varphi, K, \varphi(\cdot))} |dM|. \quad (3.1.2)$$

Die Integration der Konstanten 1 bezüglich $|dM|$ über einer meßbaren Menge liefert das n -dimensionale Volumen oder Lebesgue-Maß $V(\cdot)$ dieser Menge. Falls es eine Zahl $\nu \in (0, 1)$ gibt, so daß

$$\frac{|\det(d_u \varphi)|}{N(\varphi, K, \varphi(u))} < \nu \quad (3.1.3)$$

für alle $u \in K$ ist, so gilt $V(\varphi(K)) \leq \nu V(K)$. Also ist (3.1.3) auf K eine Art Kontraktionsbedingung für das Volumen unter der Abbildung φ . Falls K eine φ -invariante Menge ist, ist das durch φ auf K definierte dynamische System damit dissipativ bezüglich des Volumens V , und es gilt $V(K) = 0$.

3.2 Einführung subadditiver Integrale

Wesentliches Hilfsmittel der Dimensionsabschätzungen in diesem Kapitel sind äußere Integrale, die in Anlehnung an [73] definiert werden können. Im Unterschied zu [73] betrachten wir aber beliebige metrische Räume (X, ϱ) , die nicht notwendigerweise ultrametrisch sind. Ein metrischer Raum (X, ϱ) heißt *ultrametrisch*, wenn die verschärfte Dreiecksungleichung

$$\varrho(x, z) \leq \max\{\varrho(x, y), \varrho(y, z)\} \quad (3.2.1)$$

für alle $x, y, z \in X$ gilt. Außerdem beschränken wir uns auf Kugelüberdeckungen der betrachteten Mengen.

Definition 3.2.1 Es seien (X, ϱ) ein metrischer Raum und $d \in \mathbb{R}_{0+}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ reelle Zahlen. Für beliebige Teilmengen $A \subset X$ und alle nichtnegativen Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{R}_{0+}$ ist

$$I_H(A, f, d, \varepsilon) := \inf \left\{ \sum_{B \in \mathcal{U}} c_B r_B^d \mid 0 \leq c_B < \infty, \sum_{B \in \mathcal{U}} c_B \chi_B \geq f \chi_A \right\}$$

das **äußere Hausdorffsche (d, ε) -Integral** der Funktion f auf A , wobei das Infimum über alle abzählbaren Überdeckungen \mathcal{U} von A durch Kugeln B mit Radien $r_B \leq \varepsilon$ genommen wird. Existiert keine solche abzählbare Überdeckung, dann wird $I_H(A, f, d, \varepsilon) := \infty$ gesetzt. Weiterhin ist

$$I_H(A, f, d) := \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0+0} I_H(A, f, d, \varepsilon)$$

das **äußere Hausdorffsche d -Integral** der Funktion f auf A .

Die so definierten äußeren Integrale entsprechen den oberen Integralen bezüglich des äußeren Hausdorffschen (d, ε) -Maßes bzw. d -Maßes, die in [23] eingeführt wurden. Für kompakte Mengen K und beschränkte Funktionen f ist $I_H(K, f, d, \varepsilon)$ immer endlich.

Für die spezielle Funktion $f \equiv 1$ erhält man

$$I_H(A, 1, d, \varepsilon) = \inf \left\{ \sum_{B \in \mathcal{U}} c_B r_B^d \mid 0 \leq c_B < \infty, \sum_{B \in \mathcal{U}} c_B \chi_B \geq \chi_A \right\}.$$

Mengen von Paaren (c_i, B_i) mit nichtnegativen Zahlen c_i und beliebigen Teilmengen $B_i \subset X$ werden auch in [36] betrachtet und dort als gewichtete Überdeckungen einer Menge A bezeichnet, falls $\sum c_i \chi_{B_i} \geq \chi_A$ gilt. Größen analog zu $I_H(A, 1, d, \varepsilon)$ werden dann mit allgemeinen Hausdorff-Funktionen definiert und als gewichtete Hausdorff-Maße bezeichnet. Für stetige Funktionen f wird in [36] ein Funktional analog zu $I_H(X, f, d, \varepsilon)$ eingeführt.

Die oben definierten Größen $I_H(\cdot, \cdot, d, \varepsilon)$ und $I_H(\cdot, \cdot, d)$ sind für feste Zahlen d und ε Funktionale $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{0+}$, wobei \mathcal{F} die Menge aller nichtnegativen reellwertigen Funktionen auf X bezeichnet. Für diese Funktionale weisen wir im weiteren die Eigenschaften (I1), (I2'), (I3'), (I4) und (I5') nach. Der Wertebereich der Funktionale $I_H(\cdot, \cdot, d, \varepsilon)$ und $I_H(\cdot, \cdot, d)$ ist $\overline{\mathbb{R}}_{0+}$, d. h., für die Eigenschaft (I1) ist der Teil b) zu betrachten.

Lemma 3.2.1 Es seien (X, ϱ) ein metrischer Raum, $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge, $f : X \rightarrow \mathbb{R}_{0+}$ eine nichtnegative Funktion und $d, \alpha \in \mathbb{R}_{0+}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ beliebige Zahlen. Dann gilt

$$I_H(A, \alpha f, d, \varepsilon) = \alpha I_H(A, f, d, \varepsilon).$$

Beweis Falls keine abzählbare Überdeckung von A durch Kugeln mit Radien höchstens ε existiert, ist $I_H(A, \alpha f, d, \varepsilon) = \infty$ und $I_H(A, f, d, \varepsilon) = \infty$, also ist die Behauptung in diesem Fall erfüllt. Für $\alpha = 0$ gilt $I_H(A, \alpha f, d, \varepsilon) = 0$ und damit die Behauptung. Also können wir uns im weiteren auf $\alpha > 0$ und Mengen $A \subset X$, für die eine abzählbare Überdeckung durch Kugeln mit Radien höchstens ε existiert, beschränken.

Wir betrachten nun eine beliebige abzählbare Überdeckung $\mathcal{U} = \{B(u_i, r_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ von A durch Kugeln mit Radien $r_i \leq \varepsilon$ und eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen $\{c_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, so daß

$$\sum c_i \chi_{B(u_i, r_i)} \geq f \chi_A \quad (3.2.2)$$

gilt. Dann sind $\tilde{c}_i := \alpha c_i$ ($i \in \mathbb{N}$) nichtnegative Zahlen, die

$$\sum \tilde{c}_i \chi_{B(u_i, r_i)} \geq \alpha f \chi_A \quad (3.2.3)$$

erfüllen. Für diese Zahlen gilt $\sum \tilde{c}_i r_i^d = \alpha \sum c_i r_i^d$, damit ist das Infimum dieser Summe über alle möglichen Überdeckungen von A und alle möglichen Zahlenfolgen $\{\tilde{c}_i\}$, die (3.2.3) erfüllen, kleiner oder höchstens gleich $\alpha \sum c_i r_i^d$. Da dieses für jede beliebige Überdeckung von A und jede beliebige Zahlenfolge $\{c_i\}$, die (3.2.2) erfüllt, gilt, folgt daraus

$$I_H(A, \alpha f, d, \varepsilon) \leq \alpha I_H(A, f, d, \varepsilon).$$

Startet man mit einer beliebigen endlichen Überdeckung von A durch Kugeln mit Radien höchstens ε und einer beliebigen Zahlenfolge $\{\tilde{c}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, die (3.2.3) erfüllt, folgt analog die umgekehrte Ungleichung. ■

Folgerung 3.2.1 *Es seien (X, ϱ) ein metrischer Raum, $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge, $f : X \rightarrow \mathbb{R}_{0+}$ eine nichtnegative Funktion und $d, \alpha \in \mathbb{R}_{0+}$ beliebige Zahlen. Dann gilt*

$$I_H(A, \alpha f, d) = \alpha I_H(A, f, d).$$

Lemma 3.2.2 *Es seien (X, ϱ) ein metrischer Raum, $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}_{0+}$ zwei nichtnegative Funktionen und $d \in \mathbb{R}_{0+}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ beliebige Zahlen. Dann gilt*

$$I_H(A, f + g, d, \varepsilon) \leq I_H(A, f, d, \varepsilon) + I_H(A, g, d, \varepsilon).$$

Beweis Falls keine abzählbare Überdeckung von A durch Kugeln mit Radien höchstens ε existiert, ist $I_H(A, f + g, d, \varepsilon) = I_H(A, f, d, \varepsilon) = I_H(A, g, d, \varepsilon) = \infty$ und damit die Behauptung erfüllt. Es seien nun $\mathcal{U} = \{B(u_i, r_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ und $\tilde{\mathcal{U}} = \{B(\tilde{u}_i, \tilde{r}_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ zwei

Überdeckungen von A durch Kugeln mit Radien $r_i, \tilde{r}_i \leq \varepsilon$ und $\{c_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ und $\{\tilde{c}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen nichtnegativer reeller Zahlen, so daß (3.2.2) und

$$\sum \tilde{c}_i \chi_{B(\tilde{u}_i, \tilde{r}_i)} \geq g \chi_A$$

gilt. Dann ist $\mathcal{U} \cup \tilde{\mathcal{U}}$ eine Überdeckung von A durch Kugeln mit Radien höchstens ε , und es gilt

$$\sum c_i \chi_{B(u_i, r_i)} + \sum \tilde{c}_i \chi_{B(\tilde{u}_i, \tilde{r}_i)} \geq (f + g) \chi_A.$$

Damit ist $I_H(A, f + g, d, \varepsilon) \leq \sum c_i r_i^d + \sum \tilde{c}_i \tilde{r}_i^d$. Da dieses für beliebige Überdeckungen \mathcal{U} und $\tilde{\mathcal{U}}$ gilt, folgt daraus die Behauptung. ■

Folgerung 3.2.2 *Es seien (X, ϱ) ein metrischer Raum, $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}_{0+}$ zwei nichtnegative Funktionen und $d \in \mathbb{R}_{0+}$ eine beliebige Zahl. Dann gilt*

$$I_H(A, f + g, d) \leq I_H(A, f, d) + I_H(A, g, d).$$

Lemma 3.2.3 *Es seien (X, ϱ) ein metrischer Raum, A_1 und A_2 zwei Teilmengen von X , $f : X \rightarrow \mathbb{R}_{0+}$ eine nichtnegative Funktion und $d \in \mathbb{R}_{0+}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ beliebige Zahlen. Dann gilt*

$$I_H(A_1 \cup A_2, f, d, \varepsilon) \leq I_H(A_1, f, d, \varepsilon) + I_H(A_2, f, d, \varepsilon).$$

Beweis Falls es für A_1 oder A_2 keine abzählbare Überdeckung durch Kugeln mit Radien höchstens ε gibt, ist $I_H(A_1 \cup A_2, f, d, \varepsilon) = \infty$ und $I_H(A_1, f, d, \varepsilon) = \infty$ oder $I_H(A_2, f, d, \varepsilon) = \infty$ und damit die Behauptung erfüllt. Für $i = 1, 2$ sei nun $\mathcal{U}_i = \{B(u_{i,j}, r_{i,j})\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine Überdeckung von A_i und $\{c_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} c_{i,j} \chi_{B(u_{i,j}, r_{i,j})} \geq f \chi_{A_i}. \quad (3.2.4)$$

Dann ist $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ eine Überdeckung von $A_1 \cup A_2$, und es gilt $I_H(A_1 \cup A_2, f, d, \varepsilon) \leq \sum c_{1,j} r_{1,j}^d + \sum c_{2,j} r_{2,j}^d$. Da diese Ungleichung für je zwei beliebige Überdeckungen \mathcal{U}_1 , \mathcal{U}_2 und Zahlenfolgen $\{c_{1,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$, $\{c_{2,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ mit (3.2.4) gilt, folgt $I_H(A_1 \cup A_2, f, d, \varepsilon) \leq I_H(A_1, f, d, \varepsilon) + I_H(A_2, f, d, \varepsilon)$. ■

Folgerung 3.2.3 *Es seien (X, ϱ) ein metrischer Raum, A_1 und A_2 zwei Teilmengen von X , $f : X \rightarrow \mathbb{R}_{0+}$ eine nichtnegative Funktion und $d \in \mathbb{R}_{0+}$ eine beliebige Zahl. Dann gilt*

$$I_H(A_1 \cup A_2, f, d) \leq I_H(A_1, f, d) + I_H(A_2, f, d).$$

Bemerkung 3.2.1 Für kompakte disjunkte Teilmengen Riemannscher Mannigfaltigkeiten gilt in Folgerung 3.2.3 sogar die Gleichheit: Zwei kompakte disjunkte Teilmengen K_1 und K_2 einer Riemannschen Mannigfaltigkeit haben stets einen Mindestabstand ε_0 . Überdeckt man $K_1 \cup K_2$ durch Kugeln mit Radien höchstens $\frac{\varepsilon_0}{2}$, dann kann eine solche Überdeckung in zwei disjunkte Mengensysteme zerlegt werden, wovon eines die Menge K_1 überdeckt und das andere die Menge K_2 . Auf diese Weise kann $I_H(K_1, f, d, \varepsilon) + I_H(K_2, f, d, \varepsilon) \leq I_H(K_1 \cup K_2, f, d, \varepsilon)$ für alle $\varepsilon \in (0, \frac{\varepsilon_0}{2})$ und damit $I_H(K_1, f, d) + I_H(K_2, f, d) \leq I_H(K_1 \cup K_2, f, d)$ gezeigt werden.

Lemma 3.2.4 *Es seien (X, ϱ) ein metrischer Raum, $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge, $f \leq g : X \rightarrow \mathbb{R}_{0+}$ zwei nichtnegative Funktionen und $d \in \mathbb{R}_{0+}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ beliebige Zahlen. Dann gilt*

$$I_H(A, f, d, \varepsilon) \leq I_H(A, g, d, \varepsilon).$$

Beweis Falls es keine abzählbare Überdeckung von A durch Kugeln mit Radien höchstens ε gibt, gilt $I_H(A, f, d, \varepsilon) = I_H(A, g, d, \varepsilon) = \infty$, damit ist die Behauptung erfüllt. Wir betrachten nun eine beliebige abzählbare Überdeckung $\mathcal{U} = \{B(u_i, r_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ von A durch Kugeln mit Radien $r_i \leq \varepsilon$ und eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen $\{c_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, so daß

$$\sum c_i \chi_{B(u_i, r_i)} \geq g \chi_A$$

gilt. Dann ist aufgrund von $f \leq g$ auch die Ungleichung

$$\sum c_i \chi_{B(u_i, r_i)} \geq f \chi_A$$

erfüllt, aus der die Behauptung folgt. ■

Folgerung 3.2.4 *Es seien (X, ϱ) ein metrischer Raum, $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge, $f \leq g : X \rightarrow \mathbb{R}_{0+}$ zwei nichtnegative Funktionen und $d \in \mathbb{R}_{0+}$ eine beliebige Zahl. Dann gilt*

$$I_H(A, f, d) \leq I_H(A, g, d).$$

Die von Wegmann in [73] angeführte Gleichheit

$$I_H(A, 1, d, \varepsilon) = \mu_H(A, d, \varepsilon), \tag{3.2.5}$$

die der Integraleigenschaft (I5) entspricht, läßt sich in allgemeinen metrischen Räumen nicht so leicht nachweisen. Der Grund dafür ist, daß die in [73] verwendete verschärfte Dreiecksungleichung (3.2.1) im allgemeinen nicht erfüllt ist. In allgemeinen metrischen

Räumen ergibt sich aber für I_H und μ_H die Eigenschaft (I5') sofort aus der Definition des äußeren Integrals I_H .

Damit ist nachgewiesen, daß es sich bei den äußeren Hausdorffschen (d, ε) -Integralen und den äußeren Hausdorffschen d -Integralen um subadditive Integrale im Sinne von Abschnitt 1.4 handelt.

In Ergänzung zu (I5') gelten für das äußere Hausdorffsche (d, ε) -Integral und das äußere Maß $\mu_H(\cdot, d, \varepsilon)$ auf kompakten Mengen K die folgenden Relationen, zu deren Beweis wir auf eine Idee aus [51] zurückgreifen.

Lemma 3.2.5 *Es seien (X, ϱ) ein metrischer Raum, $K \subset X$ eine kompakte Menge und $d \in \mathbb{R}_{0+}$ sowie $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ beliebige Zahlen. Dann gilt*

$$I_H(K, 1, d, 3\varepsilon) \leq \mu_H(K, d, 3\varepsilon) \leq 3^d I_H(K, 1, d, \varepsilon).$$

Beweis Die erste Ungleichung ist offensichtlich erfüllt. Wir zeigen nun die zweite. Es seien $\varepsilon > 0$ eine beliebig fixierte Zahl, $\mathcal{U} = \{B(u_i, r_i)\}_{i=1}^k$ eine beliebige endliche Überdeckung der Menge K durch Kugeln mit Radien $r_i \leq \varepsilon$ und c_1, \dots, c_k nichtnegative Zahlen, so daß

$$\sum_{i=1}^k c_i \chi_{B(u_i, r_i)} \geq \chi_K \quad (3.2.6)$$

gilt. Da es nur endlich viele Werte c_i ($i = 1, \dots, k$) gibt, können wir annehmen, daß alle c_i rational sind, denn für eine vorgegebene Überdeckung ist die Bestimmung der c_i so, daß (3.2.6) erfüllt ist und $\sum c_i r_i^d$ minimal wird, ein lineares Optimierungsproblem der Form

$$r^T c = \min \text{ bei } A c \geq 1$$

mit $r = (r_1^d, \dots, r_k^d)$, $c = (c_1, \dots, c_k)$ und $A \in M_{k,k}(\{0, 1\})$. Da A nur rationale Zahlen enthält, existiert für dieses Problem auch eine rationale Lösung.

Kugeln mit Wichtungsfaktor $c_i = 0$ können von vornherein weggelassen werden. Im weiteren gelte also $c_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, k$. Es sei $p \in \mathbb{N}$ der Hauptnenner der rationalen Zahlen c_i ($i = 1, \dots, k$). Dann kann man (3.2.6) mit p multiplizieren und erhält $\sum p c_i \chi_{B(u_i, r_i)} \geq p \chi_K$, wobei $p c_i \in \mathbb{N}$ für alle $i = 1, \dots, k$ gilt. Für $p c_i > 1$ kann man die Kugel $\{B(u_i, r_i)\}$ auch $p c_i$ -mal in der Überdeckung betrachten, wobei jede mit dem Gewichtungsfaktor 1 eingeht. Also können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $p c_i = 1$ ($i = 1, \dots, k$) gilt. Damit hat die Bedingung (3.2.6) die Form

$$\sum_{i=1}^k \chi_{B(u_i, r_i)} \geq p \chi_K.$$

Nun konstruieren wir ausgehend von der Überdeckung $\mathcal{U} = \{B(u_i, r_i)\}_{i=1}^k$ insgesamt p neue Überdeckungen $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_p$ mit Radien $\leq 3\varepsilon$. Dazu sei $I = \{1, \dots, k\}$ und $I_1 = U_1 = \emptyset$. Solange I nichtleer ist, wird der Index $i_1 \in I$ der Kugel mit maximalem Radius zu I_1 und die Kugel $B(u_{i_1}, 3r_{i_1})$ zu \mathcal{U}_1 dazugenommen. Diese Kugel enthält alle Kugeln von \mathcal{U} , die sich mit $B(u_{i_1}, r_{i_1})$ schneiden. Aus der Indexmenge I werden alle Indizes i entfernt, für die $B(u_i, r_i) \subset \bigcup_{j \in I_1} B(u_j, 3r_j)$ gilt. Da I zu Beginn endlich war und in jedem Schritt wenigstens der Index i_1 aus I entfernt wird, ist nach endlich vielen Schritten $I = \emptyset$ erreicht. Die Menge U_1 ist dann eine Überdeckung von K . Wir setzen nun $I = \{1, \dots, k\} \setminus I_1$. Die Kugeln $B(u_i, r_i)$ mit $i \in I_1$ sind paarweise disjunkt. Deshalb gilt nun

$$\sum_{i \in I} \chi_{B(u_i, r_i)} \geq (p-1) \chi_K,$$

so daß für $p > 1$ das Mengensystem $\{B(u_i, r_i)\}_{i \in I}$ immer noch eine Überdeckung von K ist. Deshalb kann das eben beschriebene Verfahren insgesamt p -mal angewendet werden, wobei zur Bestimmung der Überdeckung \mathcal{U}_j immer von der Indexmenge $I = \{1, \dots, k\} \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} I_i$ ausgegangen wird ($j = 2, \dots, p$). Wir erhalten dadurch p Überdeckungen $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_p$ von K , wobei die Indexmengen I_1, \dots, I_p paarweise disjunkt sind. Für jede Überdeckung \mathcal{U}_j ($j = 1, \dots, p$) gilt $\sum_{i \in I_j} (3r_i)^d \geq \mu_H(K, d, 3\varepsilon)$. Damit erhalten wir

$$\mu_H(K, d, 3\varepsilon) \leq \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \sum_{i \in I_j} (3r_i)^d \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^k (3r_i)^d = 3^d \sum_{i=1}^k c_i r_i^d,$$

da wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $pc_i = 1$, also $c_i = \frac{1}{p}$ für alle $i = 1, \dots, k$, angenommen hatten. Da wir diese Ungleichung ausgehend von jeder beliebigen Überdeckung \mathcal{U} von K durch Kugeln mit Radien $r_i \leq \varepsilon$ und jede beliebige Folge c_1, \dots, c_k nichtnegativer Zahlen erhalten, ist damit die zweite Ungleichung der Behauptung gezeigt. ■

Folgerung 3.2.5 *Es seien (X, ϱ) ein metrischer Raum, $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge und $d \in \mathbb{R}_{0+}$ eine beliebige Zahl. Dann gilt*

$$I_H(K, 1, d) \leq \mu_H(K, d) \leq 3^d I_H(K, 1, d).$$

Aus der Folgerung 3.2.5 ergibt sich, daß $I_H(K, 1, d) = 0$ genau dann gilt, wenn $\mu_H(K, d) = 0$ ist. Außerdem ist $I_H(K, 1, d) = \infty$ äquivalent zu $\mu_H(K, d) = \infty$. Für jede kompakte Teilmenge $K \subset X$ existiert also für $I_H(K, 1, \cdot)$ ein kritischer Wert $d_I^* \in \overline{\mathbb{R}_{0+}}$ mit

$$I_H(K, 1, d) = \begin{cases} \infty & \text{für } d \in \mathbb{R}_{0+}, d < d_I^*, \\ 0 & \text{für } d \in \mathbb{R}_{0+}, d > d_I^*, \end{cases}$$

und dieser Wert d_I^* stimmt mit dem kritischen Wert d^* für $\mu_H(K, \cdot)$ und damit mit der Hausdorff-Dimension von K überein. Für obere Hausdorff-Dimensionsabschätzungen können somit auch die äußeren Hausdorffschen d -Integrale über die charakteristische Funktion anstelle der äußeren Hausdorffschen d -Maße verwendet werden. Zu Folgerung 3.2.5 analoge Aussagen sind auch in [23, 36] angeführt.

3.3 Äußere Integrale unter Transformationen

In diesem Abschnitt wird untersucht, wie sich die in Abschnitt 3.2 eingeführten äußeren Integrale unter C^1 -Transformationen verhalten. Aufgrund der Subadditivität dieser Integrale lassen sich keine zu (3.1.2) analogen Transformationsgleichungen, sondern nur Ungleichungen erhalten. Sätze, die das Transformationsverhalten der äußeren Integrale mittels Ungleichungen beschreiben, bezeichnen wir, analog zu [44], als Schrankensätze. Aus diesen Schrankensätzen lassen sich zu (3.1.3) analoge Kontraktionsbedingungen für das äußere Maß $\mu_H(\cdot, d, \varepsilon)$ bzw. für das äußere Integral $I_H(\cdot, 1, d, \varepsilon)$ herleiten, die sich für obere Abschätzungen der Hausdorff-Dimension verwenden lassen.

Wie schon in Abschnitt 1.3 erwähnt wurde, ist die Exponentialabbildung für eine Riemannsche C^r -Mannigfaltigkeit von der Glattheit C^{r-2} . Da im weiteren eine C^1 -Exponentialabbildung benötigt wird, muß die zugrundeliegende Mannigfaltigkeit wenigstens von der Glattheit C^3 sein.

Satz 3.3.1 *Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^3 -Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ eine offene Menge, $\varphi : U \rightarrow M$ eine C^1 -Abbildung und $K \subset U$ eine kompakte Menge, so daß $|\det(d_u \varphi)| > 0$ für alle $u \in K$ gilt. Weiterhin sei $f : K \rightarrow (0, 1]$ eine nichtnegative Funktion, so daß*

$$\sum_{v \in K : \varphi(v) = u} f(v) \geq 1 \quad \text{für alle } u \in \varphi(K) \quad (3.3.1)$$

erfüllt ist. Dann gilt für alle $d \in (0, n]$ und alle hinreichend kleinen Zahlen $\varepsilon > 0$ die Abschätzung

$$I_H(\varphi(K), 1, d, \varepsilon) \leq 16^n n^n I_H \left(K, \max \left\{ f \omega_d(d\varphi)^{\frac{n}{d}}, f^{\frac{d}{n}} \omega_d(d\varphi) \right\}, d, \varepsilon \right).$$

Beweis Es sei $d \in (0, n]$ eine beliebige, aber im weiteren festgehaltene Zahl. Da K kompakt und φ stetig differenzierbar ist, existiert eine hinreichend große Zahl $m > 0$ mit

$$\sup_{u \in K} \omega_d(d_u \varphi) < m^d \quad \text{und} \quad \sup_{u \in K} \|d_u \varphi\| \leq m, \quad (3.3.2)$$

wobei $\|d_u\varphi\|$ die Operatornorm des linearen Operators $d_u\varphi : T_uM \rightarrow T_{\varphi(u)}M$ bezeichnet. Nun sei $\eta > 0$ die Lösung der Gleichung

$$\left[1 + \left(\frac{m^{[d]}}{\sup_{u \in K} \omega_d(d_u\varphi)} \right)^{1/(d-[d])} \eta \right]^n = 2^{n-[d]}. \quad (3.3.3)$$

Dabei sei bemerkt, daß sich aus der Voraussetzung $|\det(d_u\varphi)| > 0$ für alle $u \in K$ die Beziehung $\sup_{u \in K} \omega_d(d_u\varphi) > 0$ ergibt und damit alle Ausdrücke in Gleichung (3.3.3) wohldefiniert sind. Für jedes $u \in K$ sei $l_u > 0$ durch

$$l_u := 2^{n-[d]} \omega_d(d_u\varphi)^{\frac{n}{d}} = \omega_d(d_u\varphi)^{\frac{n}{d}} \left[1 + \left(\frac{m^{[d]}}{\sup_{v \in K} \omega_d(d_v\varphi)} \right)^{1/(d-[d])} \eta \right]^n \quad (3.3.4)$$

definiert. Dann existiert für jedes $u \in K$ eine Zahl $\eta_u \in (0, \eta]$ mit

$$l_u = \omega_d(d_u\varphi)^{\frac{n}{d}} \left[1 + \left(\frac{m^{[d]}}{\omega_d(d_u\varphi)} \right)^{1/(d-[d])} \eta_u \right]^n. \quad (3.3.5)$$

Da $|\det(d_u\varphi)| > 0$ für alle $u \in K$ vorausgesetzt wurde und φ auf K eine C^1 -Abbildung ist, ist $\inf_{u \in K} \omega_d(d_u\varphi) > 0$. Also gilt

$$\eta_u \geq \tilde{\eta} := \left(\frac{\inf_{v \in K} \omega_d(d_v\varphi)}{\sup_{v \in K} \omega_d(d_v\varphi)} \right)^{1/(d-[d])} \eta > 0$$

für alle $u \in K$. Nun sei $r_1 > 0$ so klein gewählt, daß es kleiner als das in Satz 1.3.4 eingeführte ε_0 ist und es eine offene Menge V mit $K \subset V \subset U$ gibt, so daß die Ungleichung

$$\|\tau_{\varphi(v)}^{\varphi(u)} d_v\varphi \tau_u^v - d_u\varphi\| \leq \tilde{\eta} \quad (3.3.6)$$

für alle $u, v \in V$ mit $\varrho(u, v) \leq r_1$ erfüllt ist. Dabei bezeichnet τ die in Abschnitt 1.3 eingeführte Parallelverschiebung. Außerdem existiert eine Zahl $r_2 > 0$, die kleiner als das in Lemma 3.1.1 definierte ε_K für die Abbildung φ ist, so daß jede Kugel $B(u, r_2)$ mit Radius r_2 um einen Punkt $u \in V$, die Punkte aus K enthält, vollständig in V enthalten ist.

Aufgrund der in Abschnitt 1.3 zitierten Eigenschaft (E2) der Exponentialabbildung gibt es für jeden Punkt $u \in M$ eine Zahl $r_u > 0$, so daß $\|d_v \exp_u\| \leq 2$ für jedes $v \in B(O_u, r_u)$ erfüllt ist, und diese Zahl r_u hängt stetig vom Punkt $u \in M$ ab. Da K kompakt ist, gibt es eine Zahl $r_3 := \min_{u \in K} r_u > 0$ mit $\|d_v \exp_u\| \leq 2$ für alle $u \in K$ und alle $v \in B(O_u, r_3)$. Damit gilt

$$\varrho(\exp_u v, \exp_u w) \leq 2\varrho(v, w) \quad (3.3.7)$$

für beliebiges $u \in K$ und alle $v, w \in B(O_u, r_3)$. Wir setzen

$$r_0 := \min \left\{ r_1, r_2, \left(\frac{1}{2} + m \left[1 + \left(\frac{m^{[d]}}{\sup_{u \in K} \omega_d(d_u\varphi)} \right)^{1/(d-[d])} \eta \right] \right)^{-1} r_3 \right\}$$

und betrachten ein festes $\varepsilon \in (0, \frac{r_0}{2})$. Es sei $\{B(\tilde{u}_i, r_i)\}_{i \in I}$ eine beliebige endliche Überdeckung von K durch Kugeln mit Radien $r_i \leq \varepsilon$, so daß jede Kugel mindestens einen Punkt aus K enthält. Weiter seien $c_i \geq 0$ ($i \in I$) beliebige Zahlen mit der Eigenschaft

$$\sum_{i \in I} c_i \chi_{B(\tilde{u}_i, r_i)} \geq \max \left\{ f \omega_d(d\varphi)^{\frac{n}{d}}, f^{\frac{d}{n}} \omega_d(d\varphi) \right\} \chi_K. \quad (3.3.8)$$

Da $\omega_d(d\varphi)$ stetig auf K ist, gibt es für jedes $i \in I$ einen Punkt $u_i \in \text{cl}(B(\tilde{u}_i, r_i)) \cap K$ mit

$$\omega_d(d_{u_i}\varphi) = \inf_{u \in B(\tilde{u}_i, r_i) \cap K} \omega_d(d_u\varphi). \quad (3.3.9)$$

Dann ist das Mengensystem $\{B(u_i, 2r_i)\}_{i \in I}$ auch eine Überdeckung von K . Wegen $2r_i \leq r_2$ ist jede der Kugeln dieser neuen Überdeckung vollständig in V enthalten. Das Mengensystem $\{\varphi(B(u_i, 2r_i))\}_{i \in I}$ ist eine Überdeckung von $\varphi(K)$. Wir betrachten im weiteren eine beliebige, aber zunächst festgehaltene Zahl $i \in I$. Da $2r_i \leq r_1 < \varepsilon_0$ gilt und φ eine C^1 -Abbildung ist, gilt für jedes $v \in B(u_i, 2r_i)$ nach Satz 1.3.4 die Ungleichung

$$\begin{aligned} & \|\exp_{\varphi(u_i)}^{-1} \varphi(v) - d_{u_i}\varphi(\exp_{u_i}^{-1}(v))\| \\ & \leq \sup_{w \in B(u_i, 2r_i)} \|\tau_{\varphi(w)}^{\varphi(u_i)} d_w \varphi \tau_{u_i}^w - d_{u_i}\varphi\| \cdot \|\exp_{u_i}^{-1}(v)\|. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich unter Nutzung von (3.3.6)

$$\begin{aligned} \exp_{\varphi(u_i)}^{-1}(\varphi(B(u_i, 2r_i))) & \subset d_{u_i}\varphi(B(O_{u_i}, 2r_i)) + B(O_{\varphi(u_i)}, 2\tilde{\eta}r_i) \\ & \subset d_{u_i}\varphi(B(O_{u_i}, 2r_i)) + B(O_{\varphi(u_i)}, 2\eta_{u_i}r_i). \end{aligned}$$

Die Menge $d_{u_i}\varphi(B(O_{u_i}, 2r_i))$ ist ein Ellipsoid in $T_{\varphi(u_i)}M$. Wegen Lemma 1.2.2 sowie den Beziehungen (3.3.2) und (3.3.5) existiert ein Ellipsoid \mathcal{E}_i , das die Menge $\exp_{\varphi(u_i)}^{-1}(\varphi(B(u_i, 2r_i)))$ enthält und für das

$$\omega_d(\mathcal{E}_i) \leq (2r_i)^d l_{u_i}^{\frac{d}{n}} \quad (3.3.10)$$

gilt. Da in \mathcal{E}_i die Kugel $B(O_{\varphi(u_i)}, 2\eta_{u_i}r_i)$ eingeht, sind alle Halbachsenlängen, insbesondere $\alpha_{[d]+1}(\mathcal{E}_i)$, positiv. Aufgrund von Lemma 1.2.3 kann das Ellipsoid \mathcal{E}_i schon durch

$$N_i = \left\lfloor \frac{2^{[d]} \omega_d(\mathcal{E}_i)}{\alpha_{[d]+1}(\mathcal{E}_i)^d} \right\rfloor$$

Kugeln vom Radius $\alpha_{[d]+1}(\mathcal{E}_i)\sqrt{[d]+1}$ überdeckt werden. Ist dieser Radius größer als $\frac{r_i}{2}$, so kann jede Kugel durch

$$\tilde{N}_i = \left\lfloor 2^{2n} n^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\alpha_{[d]+1}(\mathcal{E}_i)\sqrt{[d]+1}}{r_i} \right)^n \right\rfloor$$

Kugeln vom Radius $\frac{r_i}{2}$ überdeckt werden. Dabei liegen alle Kugeln, die Punkte der Menge $\exp_{\varphi(u_i)}^{-1}(\varphi(B(u_i, 2r_i)))$ enthalten, innerhalb einer Kugel vom Radius

$$r_i + 2r_i m \left[1 + \left(\frac{m^{[d]}}{\sup_{u \in K} \omega_d(d_u \varphi)} \right)^{1/(d-[d])} \eta \right] < r_3$$

um O_{u_i} . Aufgrund von (3.3.7) ist dann die Menge $\varphi(B(\tilde{u}_i, r_i))$ wieder durch Kugeln vom Radius höchstens r_i überdeckt.

Wenn wir diese Vorgehensweise für alle $i \in I$ anwenden, erhalten wir eine Kugelüberdeckung $\{B_j\}_{j \in J}$ von $\varphi(K)$ durch Kugeln mit Radien höchstens ε . Dabei liefere die Funktion $i(j)$ zu jedem $j \in J$ jeweils den Index $i \in I$ der Kugel aus der Überdeckung von K , aus der die Kugel B_j entstanden ist. Wegen Lemma 3.1.1 und den Ungleichungen $r_i < r_2$ ($i \in I$) ist die Einschränkung der Abbildung φ auf die Kugel $B(\tilde{u}_i, r_i)$ jeweils ein Diffeomorphismus. Somit liegen Punkte mit gleichen Bildern unter φ in verschiedenen Kugeln. Da $|\det(d_u \varphi)| > 0$ für alle $u \in K$ vorausgesetzt wurde, können wir für alle $j \in J$ Zahlen

$$\tilde{c}_j := \min \left\{ \frac{c_{i(j)}}{\omega_d(d_{u_{i(j)}} \varphi)^{\frac{n}{d}}}, \frac{c_{i(j)} [\sup_{u \in K} f(u)]^{\frac{n-d}{n}}}{\omega_d(d_{u_{i(j)}} \varphi)} \right\}$$

definieren. Dann gilt aufgrund von (3.3.9) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J: u \in B_j} \tilde{c}_j &\geq \sum_{v \in K: \varphi(v)=u} \sum_{i \in I: v \in B(\tilde{u}_i, r_i)} \min \left\{ \frac{c_i}{\omega_d(d_{u_i} \varphi)^{\frac{n}{d}}}, \frac{c_i [\sup_{u \in K} f(u)]^{\frac{n-d}{n}}}{\omega_d(d_{u_i} \varphi)} \right\} \\ &\geq \sum_{v \in K: \varphi(v)=u} \sum_{i \in I: v \in B(\tilde{u}_i, r_i)} \min \left\{ \frac{c_i}{\omega_d(d_v \varphi)^{\frac{n}{d}}}, \frac{c_i [\sup_{u \in K} f(u)]^{\frac{n-d}{n}}}{\omega_d(d_v \varphi)} \right\} \\ &= \sum_{v \in K: \varphi(v)=u} \left(\min \left\{ \frac{1}{\omega_d(d_v \varphi)^{\frac{n}{d}}}, \frac{[\sup_{u \in K} f(u)]^{\frac{n-d}{n}}}{\omega_d(d_v \varphi)} \right\} \sum_{i \in I: v \in B(\tilde{u}_i, r_i)} c_i \right) \end{aligned}$$

für alle $u \in \varphi(K)$. Wegen (3.3.8) gilt

$$\sum_{i \in I: v \in B(\tilde{u}_i, r_i)} c_i \geq \max \{ f(v) \omega_d(d_v \varphi)^{\frac{n}{d}}, f^{\frac{d}{n}}(v) \omega_d(d_v \varphi) \},$$

und da für beliebige positive reelle Zahlen a_1, a_2, b_1, b_2 die Beziehung

$$\min\{a_1, a_2\} \max\{b_1, b_2\} \geq \min\{a_1 b_1, a_2 b_2\}$$

erfüllt ist, folgt mit (3.3.1)

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in J: u \in B_j} \tilde{c}_j &\geq \sum_{v \in K: \varphi(v)=u} \min \left\{ \frac{f(v) \omega_d(d_v \varphi)^{\frac{n}{d}}}{\omega_d(d_v \varphi)^{\frac{n}{d}}}, \frac{f^{\frac{d}{n}}(v) \omega_d(d_v \varphi) [\sup_{u \in K} f(u)]^{\frac{n-d}{n}}}{\omega_d(d_v \varphi)} \right\} \\
&\geq \sum_{v \in K: \varphi(v)=u} f(v) \\
&\geq 1.
\end{aligned}$$

Das ist gleichbedeutend mit $\sum_{j \in J} \tilde{c}_j \chi_{B_j} \geq \chi_{\varphi(K)}$. Damit gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&I_H(\varphi(K), 1, d, \varepsilon) \\
&\leq \sum_{i \in I: \alpha_{\lfloor d \rfloor + 1}(\mathcal{E}_i) \sqrt{\lfloor d \rfloor + 1} \leq \frac{r_i}{2}} N_i \min \left\{ \frac{c_i}{\omega_d(d_{u_i} \varphi)^{\frac{n}{d}}}, \frac{c_i [\sup_{u \in K} f(u)]^{\frac{n-d}{n}}}{\omega_d(d_{u_i} \varphi)} \right\} (2\alpha_{\lfloor d \rfloor + 1}(\mathcal{E}_i) \sqrt{\lfloor d \rfloor + 1})^d \\
&\quad + \sum_{i \in I: \alpha_{\lfloor d \rfloor + 1}(\mathcal{E}_i) \sqrt{\lfloor d \rfloor + 1} > \frac{r_i}{2}} N_i \tilde{N}_i \min \left\{ \frac{c_i}{\omega_d(d_{u_i} \varphi)^{\frac{n}{d}}}, \frac{c_i [\sup_{u \in K} f(u)]^{\frac{n-d}{n}}}{\omega_d(d_{u_i} \varphi)} \right\} r_i^d \\
&\leq \sum_{i \in I: \alpha_{\lfloor d \rfloor + 1}(\mathcal{E}_i) \sqrt{\lfloor d \rfloor + 1} \leq \frac{r_i}{2}} \frac{c_i [\sup_{u \in K} f(u)]^{\frac{n-d}{n}}}{\omega_d(d_{u_i} \varphi)} \frac{2^{\lfloor d \rfloor} \omega_d(\mathcal{E}_i)}{\alpha_{\lfloor d \rfloor + 1}(\mathcal{E}_i)^d} (2\alpha_{\lfloor d \rfloor + 1}(\mathcal{E}_i) \sqrt{\lfloor d \rfloor + 1})^d \\
&\quad + \sum_{i \in I: \alpha_{\lfloor d \rfloor + 1}(\mathcal{E}_i) \sqrt{\lfloor d \rfloor + 1} > \frac{r_i}{2}} \frac{c_i}{\omega_d(d_{u_i} \varphi)^{\frac{n}{d}}} \frac{2^{\lfloor d \rfloor} \omega_d(\mathcal{E}_i)}{\alpha_{\lfloor d \rfloor + 1}(\mathcal{E}_i)^d} 2^{2n} n^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\alpha_{\lfloor d \rfloor + 1}(\mathcal{E}_i) \sqrt{\lfloor d \rfloor + 1}}{r_i} \right)^n r_i^d \\
&= \sum_{i \in I: \alpha_{\lfloor d \rfloor + 1}(\mathcal{E}_i) \sqrt{\lfloor d \rfloor + 1} \leq \frac{r_i}{2}} \frac{c_i [\sup_{u \in K} f(u)]^{\frac{n-d}{n}}}{\omega_d(d_{u_i} \varphi)} 2^{d + \lfloor d \rfloor} (\lfloor d \rfloor + 1)^{\frac{d}{2}} \omega_d(\mathcal{E}_i) \\
&\quad + \sum_{i \in I: \alpha_{\lfloor d \rfloor + 1}(\mathcal{E}_i) \sqrt{\lfloor d \rfloor + 1} > \frac{r_i}{2}} \frac{c_i}{\omega_d(d_{u_i} \varphi)^{\frac{n}{d}}} \frac{2^{2n + \lfloor d \rfloor} n^{\frac{n}{2}} (\lfloor d \rfloor + 1)^{\frac{n}{2}} \omega_d(\mathcal{E}_i) \alpha_{\lfloor d \rfloor + 1}(\mathcal{E}_i)^{n-d}}{r_i^{n-d}}.
\end{aligned}$$

Mit (3.3.10) und der Beziehung $\alpha_{\lfloor d \rfloor + 1}(\mathcal{E}_i) \leq \omega_d(\mathcal{E}_i)^{\frac{1}{d}}$ für alle $i \in I$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}
&I_H(\varphi(K), 1, d, \varepsilon) \\
&\leq \sum_{i \in I: \alpha_{\lfloor d \rfloor + 1}(\mathcal{E}_i) \sqrt{\lfloor d \rfloor + 1} \leq \frac{r_i}{2}} \frac{c_i [\sup_{u \in K} f(u)]^{\frac{n-d}{n}}}{\omega_d(d_{u_i} \varphi)} 2^{2d + \lfloor d \rfloor} (\lfloor d \rfloor + 1)^{\frac{d}{2}} l_{u_i}^{\frac{d}{n}} r_i^d \\
&\quad + \sum_{i \in I: \alpha_{\lfloor d \rfloor + 1}(\mathcal{E}_i) \sqrt{\lfloor d \rfloor + 1} > \frac{r_i}{2}} \frac{c_i}{\omega_d(d_{u_i} \varphi)^{\frac{n}{d}}} 2^{3n + \lfloor d \rfloor} n^{\frac{n}{2}} (\lfloor d \rfloor + 1)^{\frac{n}{2}} l_{u_i} r_i^d.
\end{aligned}$$

Wegen $\sup_{u \in K} f(u) \leq 1$ und (3.3.4) folgt schließlich

$$\begin{aligned} I_H(\varphi(K), 1, d, \varepsilon) &\leq \sum_{i \in I: \alpha_{\lfloor d \rfloor + 1}(\varepsilon_i) \sqrt{\lfloor d \rfloor + 1} \leq \frac{r_i}{2}} c_i 16^n (\lfloor d \rfloor + 1)^{\frac{d}{2}} r_i^d \\ &\quad + \sum_{i \in I: \alpha_{\lfloor d \rfloor + 1}(\varepsilon_i) \sqrt{\lfloor d \rfloor + 1} > \frac{r_i}{2}} c_i 16^n n^{\frac{n}{2}} (\lfloor d \rfloor + 1)^{\frac{n}{2}} r_i^d \\ &\leq 16^n n^n \sum_{i \in I} c_i r_i^d. \end{aligned}$$

Da diese Abschätzung für jede beliebige Überdeckung $\{B(\tilde{u}_i, r_i)\}_{i \in I}$ von K durch Kugeln mit Radien $r_i \leq \varepsilon$ und jede beliebige Zahlenfolge $\{c_i\}_{i \in I}$, die (3.3.8) erfüllt, gilt, liefert sie die Behauptung. \blacksquare

Eine spezielle Funktion $f : K \rightarrow (0, 1]$, die in den Voraussetzungen von Satz 3.3.1 die Bedingung (3.3.1) erfüllt, ist $\frac{1}{N(\varphi, K, \varphi(\cdot))}$. Mit ihrer Hilfe ergibt sich eine Folgerung aus Satz 3.3.1:

Folgerung 3.3.1 *Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^3 -Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ eine offene Menge, $\varphi : U \rightarrow M$ eine C^1 -Abbildung und $K \subset U$ eine kompakte Menge, so daß $|\det(d_u \varphi)| > 0$ für alle $u \in K$ erfüllt ist. Dann gilt für jedes $d \in (0, n]$ und alle hinreichend kleinen Zahlen $\varepsilon > 0$ die Abschätzung*

$$I_H(\varphi(K), 1, d, \varepsilon) \leq 16^n n^n I_H \left(K, \max \left\{ \frac{\omega_d(d\varphi)^{\frac{n}{d}}}{N(\varphi, K, \varphi(\cdot))}, \frac{\omega_d(d\varphi)}{N(\varphi, K, \varphi(\cdot))^{\frac{d}{n}}} \right\}, d, \varepsilon \right)$$

und demzufolge auch

$$I_H(\varphi(K), 1, d) \leq 16^n n^n I_H \left(K, \max \left\{ \frac{\omega_d(d\varphi)^{\frac{n}{d}}}{N(\varphi, K, \varphi(\cdot))}, \frac{\omega_d(d\varphi)}{N(\varphi, K, \varphi(\cdot))^{\frac{d}{n}}} \right\}, d \right).$$

Bemerkung 3.3.1 Das äußere Hausdorffsche n -Maß stimmt auf glatten Mannigfaltigkeiten bis auf Normierung mit dem Lebesgue-Maß oder n -dimensionalen Volumen V überein. Folgerung 3.3.1 für $d = n$ liefert

$$I_H(\varphi(K), 1, n) \leq 16^n n^n I_H \left(K, \frac{\omega_n(d\varphi)}{N(\varphi, K, \varphi(\cdot))}, n \right). \quad (3.3.11)$$

Diese Ungleichung läßt sich mit (3.1.2) vergleichen: Auf der linken Seite wird jeweils die Konstante 1 über die Menge $\varphi(K)$ integriert, und auf der rechten Seite steht wegen $\omega_n(d\varphi) = |\det(d\varphi)|$ (siehe Abschnitt 1.2) jeweils das Integral der Funktion $\frac{|\det(d\varphi)|}{N(\varphi, K, \varphi(\cdot))}$ über die Menge K . Da das äußere Hausdorff-Integral aber im Vergleich

zum Lebesgue-Integral nur ein subadditives Funktional ist und zwischen dem äußeren Hausdorff-Maß einer Menge und dem äußeren Hausdorff-Integral über die charakteristische Funktion dieser Menge nur eine Ungleichungsbeziehung mit Korrekturfaktoren (siehe Lemma 3.2.5) und keine Gleichheit gilt, ergibt sich auch für die Transformation des äußeren Hausdorff-Integrals unter einer C^1 -Abbildung im allgemeinen nur eine Ungleichung mit zusätzlichen Faktoren und keine Gleichheit.

Unter Verwendung lokaler Umkehrabbildungen für die betrachtete Abbildung φ kann noch ein weiterer Schrankensatz für die Transformation der äußeren Hausdorff-Integrale abgeleitet werden:

Satz 3.3.2 *Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^3 -Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ eine offene Menge, $\varphi : U \rightarrow M$ eine C^1 -Abbildung, $K \subset U$ eine kompakte Menge und $\tilde{U} \supset K$ eine offene Menge, so daß $\text{cl}(\tilde{U}) \subset U$ kompakt ist, $|\det(d_u \varphi)| > 0$ für alle $u \in \text{cl}(\tilde{U})$ und $\varphi^{-1}(\tilde{U}) \subset \tilde{U}$ gilt. Weiterhin sei $f : \tilde{U} \rightarrow (0, 1]$ eine nichtnegative Funktion, für die es eine Zahl $a > 0$ gibt, so daß*

$$f(u) = f(v) \quad \text{für alle } u, v \in \tilde{U} \text{ mit } \varphi(u), \varphi(v) \in \varphi(K) \text{ und } \varrho(u, v) < a \quad (3.3.12)$$

erfüllt ist, und die der Beziehung

$$\sum_{v \in \tilde{U} : \varphi(v) = u} f(v) \leq 1 \quad \text{für alle } u \in \varphi(K) \quad (3.3.13)$$

genügt. Dann gilt für jedes $d \in (0, n]$ und alle hinreichend kleinen Zahlen $\varepsilon > 0$ die Abschätzung

$$I_H(K, f \min\{\overline{\omega}_d(d\varphi)^{\frac{n}{d}}, \overline{\omega}_d(d\varphi)\}, d, \varepsilon) \leq 16^n n^n I_H(\varphi(K), 1, d, \varepsilon).$$

(Hierbei ist $\overline{\omega}_d$ die in Abschnitt 1.2 definierte inverse Singulärwertfunktion.)

Beweis Es sei $d \in (0, n]$ eine beliebige, aber im weiteren fixierte Zahl. Da $\text{cl}(\tilde{U}) \subset U$ eine kompakte Menge ist und φ stetig differenzierbar mit $|\det(d_u \varphi)| > 0$ für alle $u \in \text{cl}(\tilde{U})$ ist, existiert eine hinreichend große Zahl $m > 0$ mit

$$\inf_{u \in \tilde{U}} \overline{\omega}_d(d_u \varphi) > \frac{1}{m^d} \quad \text{und} \quad \inf_{u \in \tilde{U}} \alpha_n(d_u \varphi) \geq \frac{1}{m}. \quad (3.3.14)$$

Nun sei $\eta > 0$ so klein gewählt, daß

$$\eta < \frac{1}{m} \quad \text{und} \quad \left[1 + \left(m^{\lfloor d \rfloor} \inf_{u \in \tilde{U}} \overline{\omega}_d(d_u \varphi) \right)^{1/(d - \lfloor d \rfloor)} \eta \right]^n \leq 2^{n - \lfloor d \rfloor} \quad (3.3.15)$$

gelten. Für jedes $u \in \tilde{U}$ seien Zahlen $l_u > 0$ durch

$$l_u := \frac{\left[1 + \left(m^{\lfloor d \rfloor} \inf_{v \in \tilde{U}} \bar{\omega}_d(d_v \varphi)\right)^{1/(d-\lfloor d \rfloor)} \eta\right]^n}{\bar{\omega}_d(d_u \varphi)^{\frac{n}{d}}} \quad (3.3.16)$$

definiert. Wegen (3.3.14) ist dabei $\bar{\omega}_d(d_u \varphi) > 0$. Dann existiert für jedes $u \in \tilde{U}$ eine Zahl $\eta_u \in (0, \eta]$ mit

$$l_u = \frac{\left[1 + \left(m^{\lfloor d \rfloor} \bar{\omega}_d(d_u \varphi)\right)^{1/(d-\lfloor d \rfloor)} \eta_u\right]^n}{\bar{\omega}_d(d_u \varphi)^{\frac{n}{d}}}, \quad (3.3.17)$$

und es gilt

$$\eta_u \geq \tilde{\eta} := \left(\frac{\inf_{v \in \tilde{U}} \bar{\omega}_d(d_v \varphi)}{\sup_{v \in \tilde{U}} \bar{\omega}_d(d_v \varphi)} \right)^{1/(d-\lfloor d \rfloor)} \eta > 0$$

für alle $u \in \tilde{U}$.

Für jeden Punkt $u \in \varphi(K)$ gibt es $N(\varphi, \tilde{U}, u)$ Urbilder u_j ($j = 1, \dots, N(\varphi, \tilde{U}, u)$) unter der Abbildung φ in der Menge \tilde{U} . Da $\text{cl}(\tilde{U}) \subset U$ kompakt ist, liefert Lemma 3.1.1 eine Zahl $\varepsilon_{\text{cl}(\tilde{U})}$, so daß $\varphi_{u,j} := \varphi|_{B(u_j, \varepsilon_{\text{cl}(\tilde{U})})}$ ein C^1 -Diffeomorphismus ist. Dabei kann $\varepsilon_{\text{cl}(\tilde{U})}$ so klein gewählt werden, daß für jedes $u \in \tilde{U}$ die Kugeln $B(u_j, \varepsilon_{\text{cl}(\tilde{U})})$ ($j = 1, \dots, N(\varphi, \tilde{U}, u)$) paarweise disjunkt sind und $\varepsilon_{\text{cl}(\tilde{U})} < \varepsilon_K$ gilt. Außerdem ist $N(\varphi, \tilde{U}, \cdot)$ aufgrund von Lemma 3.1.2 nach oben beschränkt. Weiterhin gilt für alle $u \in \varphi(K)$ die Ungleichung $N(\varphi, \tilde{U}, u) > 0$, da jedes solche u wenigstens ein Urbild in $K \subset \tilde{U}$ hat. Für jedes $u \in \varphi(K)$ und jedes $j \in \{1, \dots, N(\varphi, \tilde{U}, u)\}$ ist die Abbildung $\varphi_{u,j}^{-1}$ auf $\varphi(B(u_j, \varepsilon_{\text{cl}(\tilde{U})}))$ als C^1 -Diffeomorphismus erklärt. Aufgrund der Ungleichungen (3.3.14) und (3.3.15) ist $\bar{\eta} := \inf_{u \in \tilde{U}} \alpha_n(d_u \varphi) - \eta > 0$. Nach Lemma 3.1.5 existiert eine hinreichend kleine Zahl $\bar{r} \in (0, \varepsilon_{\text{cl}(\tilde{U})})$ mit

$$\varphi(B(u, \varepsilon_{\text{cl}(\tilde{U})})) \supset \varphi(B(u, \bar{r})) \supset B(\varphi(u), \bar{\eta} \bar{r}) \quad (3.3.18)$$

für jedes $u \in \varphi(K)$. Also ist für jedes $u \in \varphi(K)$ jede Umkehrabbildung $\varphi_{u,j}^{-1}$ jeweils auf $B(u, \bar{\eta} \bar{r})$ erklärt. Außerdem gilt für alle $\varepsilon \in (0, \bar{\eta} \bar{r})$ und alle $u \in \varphi(K)$ aufgrund von Lemma 3.1.6 die Beziehung

$$\varphi^{-1}(B(u, \varepsilon)) \cap K \subset \bigcup_{j=1}^{N(\varphi, \tilde{U}, u)} \varphi_{u,j}^{-1}(B(u, \varepsilon)). \quad (3.3.19)$$

Die Menge φ ist kompakt als Bild der kompakten Menge K unter der stetigen Abbildung φ . Es sei nun $r_1 \in (0, \frac{2}{3} \bar{\eta} \bar{r})$ so klein gewählt, daß es kleiner als das in Satz 1.3.4

eingeführte ε_0 für die Abbildungen $\varphi_{u,j}^{-1}$ ($u \in K, j = 1, \dots, N(\varphi, \tilde{U}, u)$) ist und es eine offene Menge V mit $\varphi(K) \subset V \subset \varphi(U)$ gibt, so daß

$$\|\tau_{\varphi_{u,j}^{-1}(v)}^{\varphi_{u,j}^{-1}(u)} d_v \varphi_{u,j}^{-1} \tau_u^v - d_u \varphi_{u,j}^{-1}\| \leq \tilde{\eta} \quad (j = 1, \dots, N(\varphi, \tilde{U}, u)) \quad (3.3.20)$$

für alle $u \in \varphi(K)$ und $v \in V$ mit $\varrho(u, v) \leq r_1$ erfüllt ist. Außerdem existiert eine Zahl $r_2 > 0$, so daß jede Kugel $B(u, r_2)$ mit Radius r_2 um einen Punkt $u \in V$, die Punkte aus $\varphi(K)$ enthält, vollständig in V enthalten ist. Die Zahl r_3 sei analog zum Beweis von Satz 3.3.1 gewählt. Wir setzen

$$r_0 := \min \left\{ r_1, r_2, r_3, \frac{a}{\inf_{u \in \tilde{U}} \alpha_n(d_u \varphi)} \right\}$$

und betrachten ein festes $\varepsilon \in (0, \frac{r_0}{2})$. Es sei $\{B(\tilde{u}_i, r_i)\}_{i \in I}$ eine beliebige endliche Überdeckung von $\varphi(K)$ durch Kugeln mit Radien $r_i \leq \varepsilon$, so daß jede Kugel mindestens einen Punkt aus $\varphi(K)$ enthält, und $c_i \geq 0$ ($i \in I$) seien beliebige Zahlen mit

$$\sum_{i \in I} c_i \chi_{B(\tilde{u}_i, r_i)} \geq \chi_{\varphi(K)}. \quad (3.3.21)$$

Da φ stetig differenzierbar ist, gibt es für jedes $i \in I$ und jedes $j = 1, \dots, N(\varphi, \tilde{U}, \tilde{u}_i)$ einen Punkt $u_{i,j} \in \text{cl}(B(\tilde{u}_i, r_i)) \cap \varphi(K)$ mit

$$\overline{\omega}_d(d_{\varphi_{u_{i,j}}^{-1}(u_{i,j})} \varphi) = \sup_{v \in B(\tilde{u}_i, r_i) \cap \varphi(K)} \overline{\omega}_d(d_{\varphi_{u_{i,j}}^{-1}(v)} \varphi). \quad (3.3.22)$$

Wir betrachten ein zunächst festgehaltenes $i \in I$ und die Kugeln $B(u_{i,j}, 2r_i)$ ($j \in \{1, \dots, N(\varphi, \tilde{U}, \tilde{u}_i)\}$). Für diese gilt $B(\tilde{u}_i, r_i) \subset B(u_{i,j}, 2r_i)$, und wegen $2r_i \leq r_2$ ist jede dieser Kugeln vollständig in V enthalten. Außerdem ist $B(u_{i,j}, 2r_i) \subset B(\tilde{u}_i, 3r_i)$, und wegen $3r_i < \frac{3}{2}r_1 < \overline{\eta} \overline{r}$ sind die Abbildungen $\varphi_{\tilde{u}_i, j}^{-1}$ jeweils auf der gesamten Kugel $B(u_{i,j}, 2r_i)$ definiert. Aufgrund der Taylor-Formel (Satz 1.3.4) für die differenzierbare Abbildung $\varphi_{\tilde{u}_i, j}^{-1}$ gilt für jedes $v \in B(u_{i,j}, 2r_i)$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} & \|\exp_{\varphi_{\tilde{u}_i, j}^{-1}(u_{i,j})} \varphi_{\tilde{u}_i, j}^{-1}(v) - d_{u_{i,j}} \varphi_{\tilde{u}_i, j}^{-1}(\exp_{u_{i,j}}^{-1}(v))\| \\ & \leq \sup_{w \in B(u_{i,j}, 2r_i)} \|\tau_{\varphi_{\tilde{u}_i, j}^{-1}(w)}^{\varphi_{\tilde{u}_i, j}^{-1}(u_{i,j})} d_w \varphi_{\tilde{u}_i, j}^{-1} \tau_{u_{i,j}}^w - d_{u_{i,j}} \varphi_{\tilde{u}_i, j}^{-1}\| \cdot \|\exp_{u_{i,j}}^{-1}(v)\|. \end{aligned}$$

Wegen $2r_i < r_1$ ergibt sich damit aufgrund von (3.3.20) die Inklusion

$$\exp_{\varphi_{\tilde{u}_i, j}^{-1}(u_{i,j})}(\varphi_{\tilde{u}_i, j}^{-1}(B(u_{i,j}, 2r_i))) \subset d_{u_{i,j}} \varphi_{\tilde{u}_i, j}^{-1}(B(O_{u_{i,j}}, 2r_i)) + B(O_{\varphi_{\tilde{u}_i, j}^{-1}(u_{i,j})}, 2\eta_u r_i).$$

Da die Menge $d_{u_{i,j}} \varphi_{\tilde{u}_i, j}^{-1}(B(O_{u_{i,j}}, 2r_i))$ ein Ellipsoid in $T_{\varphi_{\tilde{u}_i, j}^{-1}(u_{i,j})} M$ ist, gilt

$$\omega_d(d_{u_{i,j}} \varphi_{\tilde{u}_i, j}^{-1}(B(O_{u_{i,j}}, 2r_i))) = \omega_d(d_{u_{i,j}} \varphi_{\tilde{u}_i, j}^{-1})(2r_i)^d = \frac{1}{\overline{\omega}_d(d_{\varphi_{\tilde{u}_i, j}^{-1}(u_{i,j})} \varphi)} (2r_i)^d.$$

Aufgrund von Lemma 1.2.2 und (3.3.17) ist also $\exp_{\varphi_{\tilde{u}_i,j}^{-1}(u_{i,j})}(\varphi_{\tilde{u}_i,j}^{-1}(B(u_{i,j}, 2r_i)))$ in einem Ellipsoid $\mathcal{E}_{i,j}$ mit

$$\omega_d(\mathcal{E}_{i,j}) \leq (2r_i)^d l_{\varphi_{\tilde{u}_i,j}^{-1}(u_{i,j})}^{\frac{d}{n}} \quad (3.3.23)$$

enthalten. Analog zum Beweis von Satz 3.3.1 überdecken wir nun jedes Ellipsoid $\mathcal{E}_{i,j}$ mit Kugeln vom Radius $\alpha_{[d]+1}(\mathcal{E}_{i,j})\sqrt{[d]+1} \leq \frac{r_i}{2}$ bzw. $\frac{r_i}{2}$, falls $\alpha_{[d]+1}(\mathcal{E}_{i,j})\sqrt{[d]+1} > \frac{r_i}{2}$ ist. Dazu benötigen wir höchstens

$$N_{i,j} = \left\lfloor \frac{2^{[d]}\omega_d(\mathcal{E}_{i,j})}{\alpha_{[d]+1}(\mathcal{E}_{i,j})^d} \right\rfloor \quad \text{bzw.} \quad (3.3.24)$$

$$N_{i,j}\tilde{N}_{i,j} = \left\lfloor \frac{2^{2n+[d]}n^{\frac{n}{2}}([d]+1)^{\frac{n}{2}}\omega_d(\mathcal{E}_{i,j})\alpha_{[d]+1}(\mathcal{E}_{i,j})^{n-d}}{r_i^n} \right\rfloor$$

solche Kugeln.

Da das Mengensystem $\{\varphi_{\tilde{u}_i,j}^{-1}(B(u_{i,j}, 2r_i))\}_{i \in I, j \in J_i}$ aufgrund von (3.3.19) eine Überdeckung von K ist, erhalten wir auf diese Weise eine Überdeckung $\{B_l\}_{l \in L}$ von K durch Kugeln mit Radien höchstens ε . Dabei liefern die Funktionen $i(l)$ und $j(l)$ zu jedem $l \in L$ jeweils den Index $i \in I$ der Kugel aus der Überdeckung von $\varphi(K)$ und den Index $j \in \{1, \dots, N(\varphi, \tilde{U}, \tilde{u}_i)\}$ der Umkehrfunktion $\varphi_{\tilde{u}_i,j}^{-1}$, aus denen die Kugel B_l entstanden ist. Wir definieren nun die Wichtungsfaktoren

$$\tilde{c}_l := c_{i(l)}f(\varphi_{\tilde{u}_{i(l)},j(l)}^{-1}(u_{i(l),j(l)}))\min\{\bar{\omega}_d(d_{\varphi_{\tilde{u}_{i(l)},j(l)}^{-1}(u_{i(l),j(l)})}\varphi)^{\frac{n}{d}}, \bar{\omega}_d(d_{\varphi_{\tilde{u}_{i(l)},j(l)}^{-1}(u_{i(l),j(l)})}\varphi)\}.$$

Für alle $u \in K$ und alle $i \in I$ mit $\varphi(u) \in B(\tilde{u}_i, r_i)$ gilt

$$\varrho(\varphi(u), u_{i,j}) < 2\varepsilon < r_0 \leq \frac{a}{\inf_{u \in \tilde{U}} \alpha_n(d_u \varphi)}$$

und damit $\varrho(u, \varphi_{\tilde{u}_i,j}^{-1}(u_{i,j})) < a$ für alle $j = 1, \dots, N(\varphi, \tilde{U}, \tilde{u}_i)$. Also folgt wegen (3.3.12), (3.3.21) und (3.3.22) für alle $u \in K$

$$\begin{aligned} & \sum_{l \in L: u \in B_l} \tilde{c}_l \\ &= \sum_{l \in L: u \in B_l} c_{i(l)}f(\varphi_{\tilde{u}_{i(l)},j(l)}^{-1}(u_{i(l),j(l)})) \\ & \quad \min\{\bar{\omega}_d(d_{\varphi_{\tilde{u}_{i(l)},j(l)}^{-1}(u_{i(l),j(l)})}\varphi)^{\frac{n}{d}}, \bar{\omega}_d(d_{\varphi_{\tilde{u}_{i(l)},j(l)}^{-1}(u_{i(l),j(l)})}\varphi)\} \\ &\geq \sum_{i \in I: \varphi(u) \in B(\tilde{u}_i, r_i)} c_i f(u) \min\{\bar{\omega}_d(d_u \varphi)^{\frac{n}{d}}, \bar{\omega}_d(d_u \varphi)\} \\ &= f(u) \min\{\bar{\omega}_d(d_u \varphi)^{\frac{n}{d}}, \bar{\omega}_d(d_u \varphi)\} \sum_{i \in I: \varphi(u) \in B(\tilde{u}_i, r_i)} c_i \\ &\geq f(u) \min\{\bar{\omega}_d(d_u \varphi)^{\frac{n}{d}}, \bar{\omega}_d(d_u \varphi)\}. \end{aligned}$$

Letzteres ist gleichbedeutend mit der Ungleichung

$$\sum_{l \in L} \tilde{c}_l \chi_{B_l} \geq f \min\{\overline{\omega}_d(d\varphi)^{\frac{n}{d}}, \overline{\omega}_d(d\varphi)\} \chi_K.$$

Damit ergibt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned} & I_H(K, f \min\{\overline{\omega}_d(d\varphi)^{\frac{n}{d}}, \overline{\omega}_d(d\varphi)\}, d, \varepsilon) \\ & \leq \sum_{i \in I: \alpha_{[d]+1}(\mathcal{E}_{i,j}) \sqrt{[d]+1} \leq \frac{r_i}{2}} N_{i,j} c_i f(\varphi_{\tilde{u}_{i,j}}^{-1}(u_{i,j})) \overline{\omega}_d(d_{\varphi_{\tilde{u}_{i,j}}^{-1}(u_{i,j})} \varphi) (2\alpha_{[d]+1}(\mathcal{E}_{i,j}) \sqrt{[d]+1})^d \\ & \quad + \sum_{i \in I: \alpha_{[d]+1}(\mathcal{E}_{i,j}) \sqrt{[d]+1} > \frac{r_i}{2}} N_{i,j} \tilde{N}_{i,j} c_i f(\varphi_{\tilde{u}_{i,j}}^{-1}(u_{i,j})) \overline{\omega}_d(d_{\varphi_{\tilde{u}_{i,j}}^{-1}(u_{i,j})} \varphi)^{\frac{n}{d}} r_i^d. \end{aligned}$$

Mit (3.3.16), (3.3.23), (3.3.24) und unter Berücksichtigung von $\alpha_{[d]+1}(\mathcal{E}_{i,j}) \leq \omega_d^{\frac{1}{d}}(\mathcal{E}_{i,j})$ folgt daraus

$$\begin{aligned} & I_H(K, f \min\{\overline{\omega}_d^{\frac{n}{d}}(d\varphi), \overline{\omega}_d(d\varphi)\}, d, \varepsilon) \\ & \leq \sum_{i \in I: \alpha_{[d]+1}(\mathcal{E}_{i,j}) \sqrt{[d]+1} \leq \frac{r_i}{2}} c_i f(\varphi_{\tilde{u}_{i,j}}^{-1}(u_{i,j})) \overline{\omega}_d(d_{\varphi_{\tilde{u}_{i,j}}^{-1}(u_{i,j})} \varphi) 2^{2d+[d]} ([d]+1)^{\frac{d}{2}} l_{\varphi_{\tilde{u}_{i,j}}^{-1}(u_{i,j})}^{\frac{d}{n}} r_i^d \\ & \quad + \sum_{i \in I: \alpha_{[d]+1}(\mathcal{E}_{i,j}) \sqrt{[d]+1} > \frac{r_i}{2}} c_i f(\varphi_{\tilde{u}_{i,j}}^{-1}(u_{i,j})) \overline{\omega}_d(d_{\varphi_{\tilde{u}_{i,j}}^{-1}(u_{i,j})} \varphi)^{\frac{n}{d}} 2^{3n+[d]} n^{\frac{n}{2}} ([d]+1)^{\frac{n}{2}} l_{\varphi_{\tilde{u}_{i,j}}^{-1}(u_{i,j})} r_i^d \\ & = \sum_{i \in I: \alpha_{[d]+1}(\mathcal{E}_{i,j}) \sqrt{[d]+1} \leq \frac{r_i}{2}} c_i f(\varphi_{\tilde{u}_{i,j}}^{-1}(u_{i,j})) 2^{2d+[d] + \frac{n-[d]}{n}d} ([d]+1)^{\frac{d}{2}} r_i^d \\ & \quad + \sum_{i \in I: \alpha_{[d]+1}(\mathcal{E}_{i,j}) \sqrt{[d]+1} > \frac{r_i}{2}} c_i f(\varphi_{\tilde{u}_{i,j}}^{-1}(u_{i,j})) 16^n n^{\frac{n}{2}} ([d]+1)^{\frac{n}{2}} r_i^d \\ & \leq 16^n n^n \sum_{i \in I} \sum_{j=1}^{N(\varphi, \tilde{U}, \tilde{u}_i)} c_i f(\varphi_{\tilde{u}_{i,j}}^{-1}(u_{i,j})) r_i^d. \end{aligned}$$

Wegen (3.3.12) gilt $f(\varphi_{\tilde{u}_{i,j}}^{-1}(u_{i,j})) = f(\varphi_{\tilde{u}_{i,j}}^{-1}(u_{i,k}))$ für alle $j, k \in \{1, \dots, N(\varphi, \tilde{U}, \tilde{u}_i)\}$. Also ergibt sich mit (3.3.13) aus der vorangehenden Ungleichung

$$\begin{aligned} I_H(K, f \min\{\overline{\omega}_d(d\varphi)^{\frac{n}{d}}, \overline{\omega}_d(d\varphi)\}, d, \varepsilon) & \leq 16^n n^n \sum_{i \in I} \sum_{j=1}^{N(\varphi, \tilde{U}, \tilde{u}_i)} c_i f(\varphi_{\tilde{u}_{i,j}}^{-1}(u_{i,1})) r_i^d \\ & \leq 16^n n^n \sum_{i \in I} c_i r_i^d. \end{aligned}$$

Da diese Abschätzung für jede beliebige Überdeckung $\{B(\tilde{u}_i, r_i)\}_{i \in I}$ von $\varphi(K)$ durch Kugeln mit Radien $r_i \leq \varepsilon$ und jede beliebige Zahlenfolge $\{c_i\}_{i \in I}$, die (3.3.21) erfüllt, gilt, folgt daraus die Behauptung. ■

Wird für die Funktion $f : \tilde{U} \rightarrow (0, 1]$ aus Satz 3.3.2 speziell $\frac{1}{N(\varphi, \tilde{U}, \varphi(\cdot))}$ eingesetzt, dann sind die Bedingungen (3.3.12) und (3.3.13) aufgrund von Lemma 3.1.4 und Lemma 3.1.7 erfüllt. Somit ergibt sich aus Satz 3.3.2 die folgende Aussage:

Folgerung 3.3.2 *Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^3 -Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ eine offene Menge, $\varphi : U \rightarrow M$ eine C^1 -Abbildung, $K \subset U$ eine kompakte Menge und $\tilde{U} \supset K$ eine offene Menge, so daß $\text{cl}(\tilde{U}) \subset U$ kompakt ist, $|\det(d_u \varphi)| > 0$ für alle $u \in \text{cl}(\tilde{U})$ und $\varphi^{-1}(\tilde{U}) \subset \tilde{U}$ gilt. Dann gilt für alle $d \in (0, n]$ und alle hinreichend kleinen Zahlen $\varepsilon > 0$ die Abschätzung*

$$I_H \left(K, \frac{\min\{\bar{\omega}_d(d\varphi)^{\frac{n}{d}}, \bar{\omega}_d(d\varphi)\}}{N(\varphi, \tilde{U}, \varphi(\cdot))}, d, \varepsilon \right) \leq 16^n n^n I_H(\varphi(K), 1, d, \varepsilon)$$

und demzufolge auch

$$I_H \left(K, \frac{\min\{\bar{\omega}_d(d\varphi)^{\frac{n}{d}}, \bar{\omega}_d(d\varphi)\}}{N(\varphi, \tilde{U}, \varphi(\cdot))}, d \right) \leq 16^n n^n I_H(\varphi(K), 1, d).$$

3.4 Obere Dimensionsschranken

Der Schrankensatz 3.3.1 für das Verhalten des äußeren Hausdorffschen (d, ε) -Integrals unter Transformationen kann für abbildungsinvariante Mengen zur oberen Abschätzung der Hausdorff-Dimension ausgenutzt werden.

Satz 3.4.1 *Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^3 -Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ eine offene Menge, $\varphi : U \rightarrow M$ eine C^1 -Abbildung und $K \subset U$ eine kompakte φ -invariante Menge, so daß $|\det(d_u \varphi)| > 0$ für alle $u \in K$ gilt. Falls es Zahlen $d \in (0, n]$ und $\nu \in (0, 1)$ gibt, so daß*

$$\omega_d(d_u \varphi)^{\frac{1}{d}} \leq \nu N(\varphi, K, \varphi(u))^{\frac{1}{n}} \text{ für alle } u \in K \quad (3.4.1)$$

gilt, dann ist $\dim_H(K) \leq d$.

Beweis Da $\nu < 1$ vorausgesetzt wurde, existiert eine hinreichend große Zahl $p \in \mathbb{N}$ mit

$$\nu^p < \left(\frac{1}{16n} \right)^{\frac{n}{d}}. \quad (3.4.2)$$

Dieses p werde im weiteren festgehalten. Dann gilt für alle $u \in K$ aufgrund von Lemma 1.2.1 und der Beziehung (3.4.1)

$$\begin{aligned}\omega_d(d_u \varphi^p) &\leq \prod_{j=1}^p \omega_d(d_{\varphi^{j-1}(u)} \varphi) \\ &\leq \prod_{j=1}^p \nu^d N(\varphi, K, \varphi^j(u))^{\frac{d}{n}} \\ &= \nu^{pd} \left[\prod_{j=1}^p N(\varphi, K, \varphi^j(u)) \right]^{\frac{d}{n}}\end{aligned}$$

und damit

$$\frac{\omega_d(d_u \varphi^p)^{\frac{n}{d}}}{\prod_{j=1}^p N(\varphi, K, \varphi^j(u))} \leq \nu^{pn}. \quad (3.4.3)$$

Die Funktion $\frac{1}{\prod_{j=1}^p N(\varphi, K, \varphi^j(\cdot))} : K \rightarrow (0, 1]$ erfüllt aufgrund von Lemma 3.1.3 die Bedingung (3.3.1) bezüglich der Abbildung φ^p . Damit können wir Satz 3.3.1 auf die Abbildung φ^p anwenden und erhalten für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}I_H(\varphi^p(K), 1, d, \varepsilon) \\ \leq 16^n n^n I_H \left(K, \max \left\{ \frac{\omega_d(d \varphi^p)^{\frac{n}{d}}}{\prod_{j=1}^p N(\varphi, K, \varphi^j(u))}, \frac{\omega_d(d \varphi^p)}{[\prod_{j=1}^p N(\varphi, K, \varphi^j(u))]^{\frac{d}{n}}} \right\} d, \varepsilon \right).\end{aligned}$$

Da K invariant unter der Abbildung φ ist, gilt auch $\varphi^p(K) = K$. Also erhalten wir aus der letzten Beziehung

$$I_H(K, 1, d, \varepsilon) \leq 16^n n^n I_H \left(K, \max \left\{ \frac{\omega_d(d \varphi^p)^{\frac{n}{d}}}{\prod_{j=1}^p N(\varphi, K, \varphi^j(u))}, \frac{\omega_d(d \varphi^p)}{[\prod_{j=1}^p N(\varphi, K, \varphi^j(u))]^{\frac{d}{n}}} \right\} d, \varepsilon \right).$$

Mit (3.4.3) folgt daraus aufgrund von Lemma 3.2.4

$$I_H(K, 1, d, \varepsilon) \leq 16^n n^n I_H(K, \nu^{pd}, d, \varepsilon)$$

für alle hinreichend kleinen Zahlen $\varepsilon > 0$. Daraus ergibt sich mit Lemma 3.2.1

$$I_H(K, 1, d, \varepsilon) \leq 16^n n^n \nu^{pd} I_H(K, 1, d, \varepsilon).$$

Da wegen (3.4.2) die Ungleichung $16^n n^n \nu^{pd} < 1$ gilt und $I_H(K, 1, d, \varepsilon)$ aufgrund der Kompaktheit von K endlich ist, folgt daraus $I_H(K, 1, d, \varepsilon) = 0$. Da letzteres für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ gilt, ergibt sich $I_H(K, 1, d) = 0$ und somit $\dim_H(K) \leq d$. ■

Bemerkung 3.4.1 Die Bedingung (3.4.1) stellt eine Abschwächung der Bedingung (1.7.2) des Satzes 1.7.1 dar, denn die Vielfachheitsfunktion $N(\varphi, K, \varphi(u))$ nimmt nur Werte ≥ 1 an. Da zur Abschwächung dieser Kontraktionsbedingung für das äußere Hausdorffsche d -Maß aber Eigenschaften der Vielfachheitsfunktion verwendet wurden, die aus der Forderung resultieren, daß die invariante Menge K keine kritischen Punkte enthält, muß hier zusätzlich $|\det(d_u\varphi)| > 0$ für alle $u \in K$ gefordert werden.

Bemerkung 3.4.2 Im Unterschied zum verallgemeinerten Satz von Douady und Oesterlé (Satz 1.7.1) wird in der Singulärwertbedingung (3.4.1) von Satz 3.4.1 der Ausdruck $\omega_d(d_u\varphi)^{\frac{1}{d}}$ anstelle von $\omega_d(d_u\varphi)$ betrachtet. Der Grund dafür ist, daß eine Bedingung an d , die zu $\dim_H(K) \leq d$ führt, sinnvollerweise auch für alle $d' \in (d, n]$ erfüllt sein sollte, denn wenn d eine obere Schranke für die Hausdorff-Dimension von K ist, dann ist auch jedes $d' > d$ eine obere Schranke. Im Satz von Douady und Oesterlé ist das der Fall, denn aus $\omega_d(d_u\varphi) < 1$ für ein festes $u \in K$ folgt, daß $\omega_{d'}(d_u\varphi)$ für $d' \in [d, n]$ streng monoton fallend ist, so daß auch $\omega_{d'}(d_u\varphi) < 1$ für alle $d' \in (d, n]$ ist. Ziel der Einbeziehung der Vielfachheit war es, die obere Schranke für $\omega_d(d_u\varphi)$ zu vergrößern. Im Fall $\omega_d(d_u\varphi) > 1$ ist aber $\omega_{d'}(d_u\varphi)$ für $d' \in [d, n]$ nicht mehr notwendigerweise monoton fallend, so daß es vorkommen kann, daß obwohl $\omega_d(d_u\varphi)$ kleiner als eine vorgegebene Schranke $a > 1$ ist, es Zahlen $d' \in (d, n]$ mit $\omega_{d'}(d_u\varphi) \geq a$ gibt. In Kapitel 2 ist solch eine Situation durch Zusatzbedingungen an die Abbildung und die Menge K ausgeschlossen worden. Im Satz 3.4.1 ist dieses Problem durch den Übergang zu $\omega_d(d_u\varphi)^{\frac{1}{d}}$ gelöst worden, denn diese Funktion ist bei festem u in Abhängigkeit von d im gesamten Intervall $[0, n]$ monoton fallend. Die Bedingung (1.7.2) von Douady und Oesterlé kann auch in dieser Form als $\omega_d(d_u\varphi)^{\frac{1}{d}} < 1$ angegeben werden.

Unter Verwendung der lokalen Umkehrabbildungen für die betrachtete Abbildung φ ergibt sich aus Satz 3.3.2 die folgende Dimensionsabschätzung:

Satz 3.4.2 *Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^3 -Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ eine offene Menge, $\varphi : U \rightarrow M$ eine C^1 -Abbildung, $K \subset U$ eine kompakte Menge und $\tilde{U} \supset K$ eine offene Menge, so daß $\text{cl}(\tilde{U}) \subset U$ kompakt ist, $|\det(d_u\varphi)| > 0$ für alle $u \in \text{cl}(\tilde{U})$ ist und $\varphi^{-1}(\tilde{U}) \subset \tilde{U}$ gilt. Falls es Zahlen $d \in (0, n]$ und $\nu \in (0, 1)$ gibt, so daß*

$$\nu \overline{\omega}_d(d_u\varphi) \geq N(\varphi, \tilde{U}, \varphi(u)) \text{ für alle } u \in K \quad (3.4.4)$$

gilt, dann ist $\dim_H(K) \leq d$.

Beweis Da $\nu < 1$ gilt, existiert eine hinreichend große Zahl $p \in \mathbb{N}$ mit

$$\nu^p < \left(\frac{1}{16n}\right)^n. \quad (3.4.5)$$

Dieses p werde im weiteren festgehalten. Dann gilt für alle $u \in K$ aufgrund von Lemma 1.2.4 und der Beziehung (3.4.4)

$$\bar{\omega}_d(d_u \varphi^p) \geq \prod_{j=1}^p \bar{\omega}_d(d_{\varphi^{j-1}(u)} \varphi) \geq \prod_{j=1}^p \frac{N(\varphi, \tilde{U}, \varphi^j(u))}{\nu} = \frac{1}{\nu^p} \prod_{j=1}^p N(\varphi, \tilde{U}, \varphi^j(u))$$

und damit

$$\frac{\bar{\omega}_d(d_u \varphi^p)}{\prod_{j=1}^p N(\varphi, \tilde{U}, \varphi^j(u))} \geq \frac{1}{\nu^p}. \quad (3.4.6)$$

Die Funktion $\frac{1}{\prod_{j=1}^p N(\varphi, \tilde{U}, \varphi^j(\cdot))} : \tilde{U} \rightarrow (0, 1]$ erfüllt aufgrund von Lemma 3.1.7 die Bedingung (3.3.12) und wegen Lemma 3.1.4 die Bedingung (3.3.13) bezüglich der Abbildung φ^p . Damit können wir Satz 3.3.2 auf die Abbildung φ^p anwenden und erhalten für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ die Beziehung

$$I_H \left(K, \frac{\min\{\bar{\omega}_d(d\varphi^p)^{\frac{n}{d}}, \bar{\omega}_d(d\varphi^p)\}}{\prod_{j=1}^p N(\varphi, \tilde{U}, \varphi^j(\cdot))}, d, \varepsilon \right) \leq 16^n n^n I_H(\varphi^p(K), 1, d, \varepsilon).$$

Aus (3.4.6) folgt wegen $\nu \in (0, 1)$ und $N(\varphi, \tilde{U}, \varphi^j(u)) \geq 1$ für alle $u \in K$ und alle $j = 1, \dots, p$ die Ungleichung $\bar{\omega}_d(d\varphi^p) > 1$ und damit $\bar{\omega}_d(d\varphi^p)^{\frac{n}{d}} \geq \bar{\omega}_d(d\varphi^p)$. Da K invariant unter der Abbildung φ ist, gilt außerdem $\varphi^p(K) = K$. Also ist die obige Ungleichung gleichbedeutend mit

$$I_H \left(K, \frac{\bar{\omega}_d(d\varphi^p)}{\prod_{j=1}^p N(\varphi, \tilde{U}, \varphi^j(\cdot))}, d, \varepsilon \right) \leq 16^n n^n I_H(K, 1, d, \varepsilon). \quad (3.4.7)$$

Aus (3.4.6) und Lemma 3.2.4 folgt

$$I_H \left(K, \frac{\bar{\omega}_d(d\varphi^p)}{\prod_{j=1}^p N(\varphi, \tilde{U}, \varphi^j(\cdot))}, d, \varepsilon \right) \geq I_H(K, \frac{1}{\nu^p}, d, \varepsilon).$$

Mit Lemma 3.2.1 heißt das

$$I_H \left(K, \frac{\bar{\omega}_d(d\varphi^p)}{\prod_{j=1}^p N(\varphi, \tilde{U}, \varphi^j(\cdot))}, d, \varepsilon \right) \geq \frac{1}{\nu^p} I_H(K, 1, d, \varepsilon).$$

Zusammen mit (3.4.7) ergibt sich daraus

$$I_H(K, 1, d, \varepsilon) \leq 16^n n^n \nu^p I_H(K, 1, d, \varepsilon).$$

Da wegen (3.4.5) die Ungleichung $16^n n^n \nu^p < 1$ gilt und $I_H(K, 1, d, \varepsilon)$ aufgrund der Kompaktheit von K endlich ist, folgt daraus $I_H(K, 1, d, \varepsilon) = 0$. Da dieses für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ gilt, heißt das $I_H(K, 1, d) = 0$ und damit $\dim_H(K) \leq d$. ■

Bemerkung 3.4.3 Die Sätze 3.4.1 und 3.4.2 können nicht auf dieselbe Abbildung angewendet werden, da sich die Bedingungen (3.4.1) und (3.4.4) gegenseitig ausschließen: Falls (3.4.1) mit einem $d \in (0, n]$ erfüllt ist, dann muß $\omega_n(d_u\varphi) < N(\varphi, K, \varphi(u))$ für alle $u \in K$ gelten, wogegen aus (3.4.4) $\omega_n(d_u\varphi) > N(\varphi, K, \varphi(u))$ für alle $u \in K$ folgt. Damit ergänzen sich die Anwendungsbereiche dieser beiden Sätze und überschneiden sich nicht. Für injektive Abbildungen ist Satz 3.4.1 im volumendissipativen Fall und Satz 3.4.2 im volumenexpansiven Fall anwendbar.

3.5 Anwendungsbeispiele

3.5.1 Stückweise lineare Abbildungen in \mathbb{R}^n

Analog zum Satz von Douady und Oesterlé gibt es für Satz 3.4.1 keine nichttrivialen eindimensionalen Beispiele, da im Eindimensionalen nur ein Singulärwert existiert und damit die Bedingung (3.4.1) die Form $\alpha_1(d_u\varphi) \leq \nu N(\varphi, K, \varphi(u))$ hat, sie ist also unabhängig von d . Damit ist für jede invariante Menge einer Abbildung im Eindimensionalen, für die die Bedingung (3.4.1) erfüllt ist, die Hausdorff-Dimension gleich Null. Deshalb betrachten wir hier als einfachstes Beispiel eine stückweise lineare Abbildung in \mathbb{R}^2 , und zwar eine modifizierte Bäckerabbildung. Es sei φ auf dem Einheitsquadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ durch

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} (6x, \lambda y) & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{6}, \\ (6x - 1, \lambda y + \frac{1}{2}) & \text{für } \frac{1}{6} \leq x < \frac{1}{3}, \\ (6x - 2, \lambda y) & \text{für } \frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2}, \\ (6x - 3, \lambda y + \frac{1}{2}) & \text{für } \frac{1}{2} \leq x < \frac{2}{3}, \\ (6x - 4, \lambda y) & \text{für } \frac{2}{3} \leq x < \frac{5}{6}, \\ (6x - 5, \lambda y + \frac{1}{2}) & \text{für } \frac{5}{6} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

definiert, wobei $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$ ein Parameter ist. Die maximale invariante Menge dieser Abbildung ist $K = \bigcap_{p \in \mathbb{N}_0} \varphi^p([0, 1] \times [0, 1])$. Dabei haben alle Punkte aus K jeweils drei Urbilder in K , es gilt also $N(\varphi, K, u) = 3$ für alle $u \in K$. Die Menge K ist das Kreuzprodukt aus dem Einheitsintervall mit einer gleichmäßigen Cantor-Menge (siehe [21]), wie in Abb. 3.2 dargestellt ist. Deshalb gilt für ihre Hausdorff-Dimension nach [21]

$$\dim_H(K) = 1 + \frac{\ln 2}{-\ln \lambda}.$$

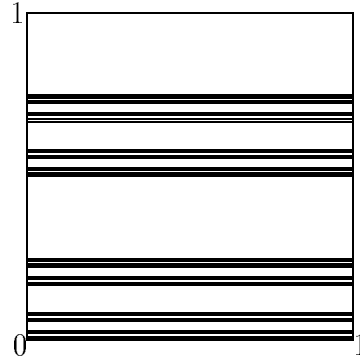


Abbildung 3.2: Struktur der invarianten Menge K für $\lambda = \frac{1}{3}$

In \mathbb{R}^2 ist die Abbildung φ nicht stetig. Wir können sie aber auf dem Torus T betrachten, der durch die Äquivalenzrelation

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_2 = x_1 + b, y_2 = y_1 + a - \frac{b}{2} \quad (a, b \in \mathbb{Z})$$

definiert ist und mit der flachen Metrik

$$\varrho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \min_{(u, v) \sim (x_2, y_2)} \sqrt{(u - x_1)^2 + (v - y_1)^2}$$

verstanden ist. Auf diesem Torus ist φ auf $\tilde{K} = \pi(K)$ stetig differenzierbar, wobei $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T$ die kanonische Projektion bezeichne. Da $\dim_H(K) = \dim_H(\tilde{K})$ gilt, können wir im weiteren auch die Menge \tilde{K} betrachten.

Auf dem Torus T kann φ auf eine offene Umgebung U von \tilde{K} als C^1 -Abbildung fortgesetzt werden. Diese Fortsetzung sei mit $\tilde{\varphi}$ bezeichnet. Die Singulärwerte der Tangentialabbildung $d_u \tilde{\varphi}$ sind 6 und λ , unabhängig vom Punkt $u \in \tilde{K}$. Die Bedingung (3.4.1) kann damit für $d \in (0, 1]$ nicht erfüllt werden, für $d \in (1, 2]$ hat sie aufgrund von $N(\tilde{\varphi}, \tilde{K}, u) = 3$ für alle $u \in \tilde{K}$ die Form

$$(6\lambda^{d-1})^{\frac{1}{d}} < \sqrt{3}. \quad (3.5.1)$$

Das ist gleichbedeutend mit $d > \frac{\ln 6 - \ln \lambda}{\ln \sqrt{3} - \ln \lambda}$ für beliebiges $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$. Satz 3.4.1 kann damit auf diese Abbildung angewendet werden und liefert

$$\dim_H(\tilde{K}) = \dim_H(K) \leq \frac{\ln 6 - \ln \lambda}{\ln \sqrt{3} - \ln \lambda} \quad \text{für beliebiges } \lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Dieser Wert ist im Vergleich zur exakten Dimension $\dim_H(K) = 1 + \frac{\ln 2}{-\ln \lambda}$ nur eine obere Schranke. Satz 3.4.2 ist hier nicht anwendbar, da die Bedingung (3.4.4) nicht erfüllt werden kann, wenn die Bedingung (3.4.1) für ein $d \in (0, n]$ gilt (siehe Bemerkung 3.4.3).

Für diese Beispielabbildung kann für geeignete Parameterwerte auch der Satz 1.7.1 angewendet werden. Die Bedingung (1.7.2) kann für $d \in (0, 1]$ nicht erfüllt werden, für $d \in (1, 2]$ hat sie die Form $6\lambda^{d-1} < 1$. Also ist Satz 1.7.1 für Parameterwerte $\lambda \in (0, \frac{1}{6})$ anwendbar und liefert im Grenzübergang die Abschätzung $\dim_H(K) \leq 1 + \frac{\ln 6}{-\ln \lambda}$.

Damit ist Satz 3.4.1 in diesem Beispiel eine wesentliche Verbesserung der Dimensionsabschätzung des Satzes 1.7.1, denn er ist auch für Parameterwerte $\lambda \in [\frac{1}{6}, \frac{1}{2})$ anwendbar und liefert außerdem im Fall $\lambda \in (0, \frac{1}{6})$ eine kleinere obere Schranke. Beispielsweise erhalten wir für $\lambda = \frac{1}{8}$ mit Satz 1.7.1 die obere Abschätzung $\dim_H(K) \leq 1 + \frac{\ln 6}{\ln 8} \approx 1,862$, wogegen Satz 3.4.1 den Wert $\dim_H(K) \leq \frac{\ln 6 + \ln 8}{\ln \sqrt{3} + \ln 8} \approx 1,473$ liefert, der wesentlich näher am exakten Wert $\dim_H(K) = 1 + \frac{\ln 2}{\ln 8} = 1, \overline{3}$ liegt.

3.5.2 Stückweise lineare Abbildungen auf dem Zylinder

Als Beispiel einer Riemannschen Mannigfaltigkeit, die nicht trivialerweise der \mathbb{R}^n ist, betrachten wir den flachen Zylinder

$$Z = \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{u = (x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in [0, 1)\},$$

versehen mit dem konstanten Metriktensor, der die Metrik

$$\varrho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + \min_{v \sim y_2} \{(v - x_2)^2\}}$$

liefert. Wir wollen hier eine spezielle stückweise lineare Abbildung φ betrachten, die auf den Mengen $A_1 := \{(x, y) \in M \mid x \in [0, \frac{1}{3}]\}$ und $A_2 := \{(x, y) \in M \mid x \in [\frac{2}{3}, 1]\}$ durch

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} (3x, y) & \text{für } (x, y) \in A_1, \\ (3x - 2, y) & \text{für } (x, y) \in A_2. \end{cases}$$

definiert ist. Diese Abbildung kann stetig differenzierbar auf eine offene Umgebung U von $A_1 \cup A_2$ fortgesetzt werden. Diese Fortsetzung sei auch mit φ bezeichnet. Wie auch die ursprüngliche Abbildung ist diese Fortsetzung nicht injektiv. Es sei $K := \bigcap_{j=0}^{\infty} \varphi^{-j}(A_1 \cup A_2)$ die maximale invariante Menge, $K_1 := K \cap A_1$ und $K_2 := K \cap A_2$. Dann hat jeder Punkt aus K in jeder der beiden Mengen K_1, K_2 genau ein Urbild, es gilt also $N(\varphi, K, \varphi(\cdot)) = 2$. Die Singulärwerte der Tangentialabbildung sind konstant $\alpha_1 = 3$ und $\alpha_2 = 1$.

Die Bedingung (3.4.1) aus Satz 3.4.1 läßt sich hier nicht erfüllen. Die Bedingung (3.4.4) kann für $d \leq 1$ ebenfalls nicht erfüllt werden. Für $d \in (1, 2]$ hat sie die Form

$$3^{d-1} > 2$$

und ist damit äquivalent zu $d > 1 + \frac{\ln 2}{\ln 3}$. Für alle diese Werte liefert Satz 3.4.2 die Abschätzung $\dim_H(K) \leq d$. Im Grenzübergang $d \rightarrow 1 + \frac{\ln 2}{\ln 3}$ heißt das

$$\dim_H(K) \leq 1 + \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

Diese Dimensionsabschätzung ist sogar scharf. Die invariante Menge K ist nämlich das Kreuzprodukt einer gleichmäßigen Cantor-Menge (siehe [21]) der Hausdorff- und Kapazitiven Dimension $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ mit einer Kreislinie, so daß $\dim_H(K) = 1 + \frac{\ln 2}{\ln 3}$ gilt (siehe [21]).

Im Vergleich zum verallgemeinerten Satz von Douady und Oesterlé (Satz 1.7.1) sei bemerkt, daß die Abbildung φ nicht volumendissipativ ist, so daß Satz 1.7.1 nicht anwendbar ist. Eine Dimensionsabschätzung wird hier also erst durch die Einbeziehung der Vielfachheitsfunktion möglich.

3.5.3 Julia-Mengen von Polynomen in der komplexen Ebene

Eine bekannte Klasse nicht injektiver Abbildungen sind Polynome in der komplexen Ebene. Als Beispiel betrachten wir hier quadratische Polynome $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ der Form

$$\varphi(z) = z^2 + c,$$

wobei $c \in \mathbb{C}$ ein Parameter ist. Der Abschluß K der Menge der abstoßenden periodischen Orbits dieser Abbildung wird als Julia-Menge bezeichnet (siehe z. B. [21, 64]). Diese Menge ist kompakt, nichtleer und invariant unter der Abbildung φ . Einige Beispiele für Julia-Mengen der Abbildung $\varphi(z) = z^2 + c$ für verschiedene Parameterwerte c sind in Abb. 3.3 dargestellt ([21]).

Für $c = 0$ ist die Julia-Menge die komplexe Einheitskreislinie. Ist $c \neq 0$ eine betragsmäßig kleine komplexe Zahl, so hat φ eine anziehende Ruhelage nahe Null. Für betragsmäßig kleine Zahlen z konvergiert die Folge $\{\varphi^p(z)\}_{p \in \mathbb{N}}$ für $p \rightarrow \infty$ gegen diese Ruhelage. Wenn z betragsmäßig groß ist, divergiert dagegen die Folge $\{|\varphi^p(z)|\}_{p \in \mathbb{N}}$ für $p \rightarrow \infty$ gegen ∞ . Die Julia-Menge ist der Rand zwischen diesen beiden Verhaltenstypen (siehe z. B. Abb. 3.3 (a),(b)). Wenn c betragsmäßig groß ist, dann ist die Julia-Menge total unzusammenhängend (siehe Abb. 3.3 (g)). Dazwischen gibt es Parameterbereiche, in denen anziehende periodische Orbits existieren (siehe Abb. 3.3 (c)-(f)). Spezielle Formen der Julia-Menge treten auf, wenn eine Iterierte des kritischen Punktes $z = 0$ periodisch ist (siehe Abb. 3.3 (h)). Aufgrund dieser verschiedenen Möglichkeiten für das Aussehen der Julia-Menge ist es interessant, ihre Hausdorff- Dimension zu untersuchen.

Betrachten wir \mathbb{C} als zweidimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit mit einem konstanten Metriktenor, der die Metrik

$$\varrho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z_1) - \operatorname{Re}(z_2))^2 + (\operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2))^2}$$

Abbildung 3.3: Julia-Mengen des quadratischen Polynoms $\varphi(z) = z^2 + c$ für
(a) $c = -0,1 + 0,1i$ (b) $c = -0,5 + 0,5i$ (c) $c = -1 + 0,5i$ (d) $c = -0,2 + 0,75i$
(e) $c = 0,25 + 0,52i$ (f) $c = -0,5 + 0,55i$ (g) $c = 0,66i$ (h) $c = -i$

erzeugt, wobei Re und Im den Realteil bzw. Imaginärteil der jeweiligen komplexen Zahl bezeichnen. Dann berechnen sich die Singulärwerte der Tangentialabbildung von φ im Punkt z als Singulärwerte der Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(z) \\ \operatorname{Im}(z) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(z)^2 - \operatorname{Im}(z)^2 + \operatorname{Re}(c) \\ 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(c) \end{pmatrix},$$

d. h. als Eigenwerte der Matrix

$$\begin{aligned} \sqrt{J_z^T J_z} &= \sqrt{\begin{pmatrix} 2\operatorname{Re}(z) & 2\operatorname{Im}(z) \\ -2\operatorname{Im}(z) & 2\operatorname{Re}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\operatorname{Re}(z) & -2\operatorname{Im}(z) \\ 2\operatorname{Im}(z) & 2\operatorname{Re}(z) \end{pmatrix}} \\ &= \begin{pmatrix} 2\sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Eine direkte Rechnung ergibt

$$\alpha_1(d_z \varphi) = \alpha_2(d_z \varphi) = 2\sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} = 2|z|.$$

Deshalb ist für $d \in (0, 2]$ und beliebiges $z \in \mathbb{C}$

$$\omega_d(d_z \varphi) = \overline{\omega}_d(d_z \varphi) = (2|z|)^d.$$

Für die Vielfachheitsfunktion der Abbildung φ bezüglich K und jeder beliebig gewählten offenen Umgebung \tilde{U} von K gilt hier

$$N(\varphi, K, \varphi(z)) = N(\varphi, \tilde{U}, \varphi(z)) = 2 \quad \text{für alle } z \in K,$$

falls der Nullpunkt nicht in der Julia-Menge K enthalten ist.

Um die Hausdorff-Dimension der Julia-Menge mit Hilfe der Sätze aus Abschnitt 3.4 abschätzen zu können, müssen für die Punkte der Julia-Menge obere und untere Abschätzungen des Betrages gefunden werden, d. h., die Julia-Menge muß in einen Kreisring um den Koordinatenursprung eingeschlossen werden.

Betrachten wir zunächst kleine Werte für $|c|$, nämlich $|c| < \frac{1}{4}$. In diesem Fall kann man den Radius R_1 eines Kreises K_1 um den Koordinatenursprung angeben, für den $\varphi(K_1) \subset K_1$ gilt: Der größtmögliche Kreis mit dieser Eigenschaft muß die Gleichung $R_1^2 + |c| = R_1$ erfüllen, die größte Lösung dieser Gleichung ist $R_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - |c|}$. Da $R_1 < 1$ gilt, ist $\{\varphi^p(K_1)\}_{p \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Kreisen, deren Radien R_1^p gegen Null konvergieren. Aufgrund von $\varphi(K_1) \subset K_1$ gilt $\varphi^{p+1}(K_1) \subset \varphi^p(K_1)$ für alle $p \in \mathbb{N}$,

also besteht $\bigcap_{p \in \mathbb{N}} \varphi^p(K_1)$ aus genau einem Punkt. Alle Punkte aus K_1 konvergieren unter der Abbildung φ gegen diesen Punkt, der eine anziehende Ruhelage ist. Damit können Punkte aus K_1 nicht in der Julia-Menge liegen. Es gilt somit

$$|z| > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - |c|} \quad \text{für alle } z \in K. \quad (3.5.2)$$

Analog kann man den Radius R_2 eines Kreises K_2 um den Koordinatenursprung berechnen, für den $\varphi(K_2) \supset K_2$ gilt: Der kleinste solche Radius muß die Gleichung $R_2^2 = R_2 + |c|$ erfüllen, diese Gleichung hat im Bereich der nichtnegativen reellen Zahlen genau eine Lösung $R_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + |c|}$. Für Punkte $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R_2$ ist $|\varphi(z)| > |z|$, damit ist die Folge $\{|\varphi^p(z)|\}_{p \in \mathbb{N}}$ streng monoton wachsend. Ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R_2$ kann also nicht beliebig nah an einem periodischen Orbit liegen und damit nicht zum Abschluß der Menge der abstoßenden periodischen Orbits, also zur Julia-Menge, gehören. Damit gilt

$$|z| \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + |c|} \quad \text{für alle } z \in K. \quad (3.5.3)$$

Mit den Abschätzungen (3.5.2) und (3.5.3) kann nun überprüft werden, ob die Voraussetzungen der Sätze aus Abschnitt 3.4 erfüllt werden können. Da die Vielfachheitsfunktion konstant ist, kann auf die Zahl ν in den Bedingungen (3.4.1) und (3.4.4) verzichtet werden. Die Bedingung (3.4.1) aus Satz 3.4.1 hat damit die Form $2|z| < \sqrt{2}$ für alle $z \in K$. Diese Eigenschaft kann mit der Abschätzung (3.5.3) nicht nachgewiesen werden. Um Satz 3.4.2 anwenden zu können, sei bemerkt, daß eine Umgebung \tilde{U} mit den geforderten Eigenschaften gefunden werden kann. Die Bedingung (3.4.4) hat hier die Form $(2|z|)^d > 2$ für alle $z \in K$. Aufgrund von (3.5.2) ist diese Bedingung erfüllt, wenn

$$\left(1 + \sqrt{1 - 4|c|}\right)^d > 2$$

gilt. Für $|c| < \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ ist diese Ungleichung für Zahlen $d < 2$ wahr, nämlich für alle $d > \frac{\ln 2}{\ln(1 + \sqrt{1 - 4|c|})}$. Für alle solchen Zahlen d liefert Satz 3.4.2 die Abschätzung $\dim_H(K) \leq d$. Im Grenzübergang $d \rightarrow \frac{\ln 2}{\ln(1 + \sqrt{1 - 4|c|})}$ heißt das

$$\dim_H(K) \leq \frac{\ln 2}{\ln(1 + \sqrt{1 - 4|c|})} \quad \text{für } |c| < \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

Nun betrachten wir betragsmäßig große Parameterwerte, nämlich $|c| > 2$. In diesem Fall ist im Beweis von Satz 14.5 aus [21] gezeigt worden, daß

$$\sqrt{|c| - \sqrt{|2c|}} \leq |z| \leq \sqrt{|c| + \sqrt{|2c|}} \quad \text{für alle } z \in K \quad (3.5.4)$$

gilt. Die Bedingung (3.4.1) aus Satz 3.4.1 hat wieder die Form $2|z| < \sqrt{2}$ für alle $z \in K$, das ist aufgrund von (3.5.4) für Parameterwerte $|c| > 2$ nicht erfüllt. Die Bedingung (3.4.4) aus Satz 3.4.2 in der Form $(2|z|)^d > 2$ ist wegen (3.5.4) wahr, falls

$$\left(2\sqrt{|c| - \sqrt{|2c|}}\right)^d > 2 \quad (3.5.5)$$

gilt. Diese Ungleichung kann im Falle $|c| > \frac{3}{2} + \sqrt{2}$ für Zahlen $d < 2$ erfüllt werden, nämlich für alle $d > \frac{\ln 2}{\ln\left(2\sqrt{|c| - \sqrt{|2c|}}\right)}$. Für alle solchen Zahlen d erhält man mit

Satz 3.4.2 $\dim_H(K) \leq d$, also gilt

$$\dim_H(K) \leq \frac{\ln 2}{\ln\left(2\sqrt{|c| - \sqrt{|2c|}}\right)} \quad \text{für } |c| > \frac{3}{2} + \sqrt{2}.$$

Das ist dieselbe obere Schranke für die Hausdorff-Dimension der Julia-Menge, die für einen etwas größeren Parameterbereich $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6})$ auch in [21] erreicht wurde.

3.5.4 Iterierte Funktionensysteme

Iterierte Funktionensysteme wurden zum ersten Mal in [5] als allgemeine Konstruktionsmöglichkeit für Fraktale beschrieben. Wichtige Aspekte solcher Funktionensysteme werden in [21, 38] dargestellt. So ist die im vorangegangenen Abschnitt hergeleitete obere Schranke für die Hausdorff-Dimension von Julia-Mengen in [21] unter Betrachtung eines iterierten Funktionensystems abgeleitet worden. Ein *iteriertes Funktionensystem* auf einem metrischen Raum (X, ϱ) ist eine endliche Familie von Abbildungen $\mathcal{S} = \{S_i : X \rightarrow X\}_{i=1}^k$. Eine Menge $A \subset X$ heißt *\mathcal{S} -invariant*, wenn

$$A = \bigcup_{i=1}^k S_i(A)$$

gilt. Falls das iterierte Funktionensystem nur aus einer einzigen Abbildung S_1 besteht, ist \mathcal{S} -invariant gleichbedeutend mit S_1 -invariant, in diesem Fall stimmt die Invarianz bezüglich eines iterierten Funktionensystems also mit dem in Abschnitt 1.6 eingeführten Begriff überein. Setzt man voraus, daß X vollständig ist und die Abbildungen S_i Kontraktionen sind, dann existiert nach [38] eine eindeutig bestimmte kompakte invariante Menge K des iterierten Funktionensystems $\mathcal{S} = \{S_i\}_{i=1}^k$, und diese ist der Abschluß der Menge der Ruhelagen s_{i_1, \dots, i_p} endlicher Kompositionen $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_p}$ von Abbildungen aus \mathcal{S} . Wir wollen im weiteren aber nicht notwendigerweise voraussetzen, daß die Abbildungen S_i Kontraktionen sind.

Wir betrachten nun iterierte Funktionensysteme $\mathcal{S} = \{S_i : M \rightarrow M\}_{i=1}^k$ auf n -dimensionalen Riemannschen C^3 -Mannigfaltigkeiten (M, g) . Um für invariante Mengen solcher iterierter Funktionensysteme Dimensionsabschätzungen aus Abschnitt 3.4

anwenden zu können, muß das Funktionensystem auf eine einzige Abbildung zurückgeführt werden, die außerdem noch stetig differenzierbar ist. Das ist immer dann möglich, wenn für eine kompakte invariante Menge K eines iterierten Funktionensystems $\mathcal{S} = \{S_i\}_{i=1}^k$ die folgende Bedingung erfüllt ist:

- (IF) Die Mengen $S_i(K)$ ($i = 1, \dots, k$) sind paarweise disjunkt, und die Abbildungen S_i sind jeweils auf einer offenen Umgebung U_i von K ein C^1 -Diffeomorphismus.

Da unter der Bedingung (IF) die Mengen $S_i(K)$ kompakte disjunkte Mengen sind, können die Umgebungen U_i so klein gewählt werden, daß auch die Mengen $S_i(U_i)$ paarweise disjunkt sind. Die Menge $U = \bigcup_{i=1}^k S_i(U_i)$ ist damit eine offene Umgebung von K , und auf dieser Umgebung kann eine Abbildung $\varphi : U \rightarrow M$ durch

$$\varphi(u) = S_{i(u)}^{-1}(u) \quad (3.5.6)$$

definiert werden, wobei $i : U \rightarrow \{1, \dots, k\}$ zu jedem Punkt $u \in U$ den eindeutig bestimmten Index i mit $u \in S_i(U_i)$ liefert. Diese Abbildung φ ist damit eine C^1 -Abbildung, definiert auf einer offenen Umgebung von K , und K ist invariant unter φ . Für alle Punkte $u \in K$ ist $N(\varphi, K, \varphi(u)) = k$, und für jede offene Menge \tilde{U} mit $K \subset \tilde{U} \subset U$, für die $\text{cl}(\tilde{U})$ kompakt ist, gilt $N(\varphi, \tilde{U}, \varphi(u)) = k$. Also sind die in den Voraussetzungen der Sätze in Abschnitt 3.4 benutzen Vielfachheitsfunktionen jeweils konstant. Somit ergeben sich für iterierte Funktionensysteme, analog zu Abschnitt 3.5.3, globale Bedingungen an die Singulärwerte der Abbildung φ . Für Punkte $u \in U$ gilt nach der Definition der inversen Singulärwertfunktion in Abschnitt 1.2

$$\omega_d(d_u \varphi) = \frac{1}{\bar{\omega}_d(d_{\varphi(u)} S_{i(u)}), \quad \bar{\omega}_d(d_u \varphi) = \frac{1}{\omega_d(d_{\varphi(u)} S_{i(u)})}.$$

Die Bedingungen der Sätze aus Abschnitt 3.4 an die Abbildung φ können somit zu Bedingungen an die Abbildungen aus \mathcal{S} umformuliert werden. Damit ergeben sich als Folgerungen aus den Sätzen aus Abschnitt 3.4 für iterierte Funktionensysteme mit der Eigenschaft (IF) die folgenden Dimensionsabschätzungen für deren invariante Mengen:

Folgerung 3.5.1 *Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^3 -Mannigfaltigkeit, $\mathcal{S} = \{S_i : M \rightarrow M\}_{i=1}^k$ ein iteriertes Funktionensystem und $K \subset M$ eine kompakte \mathcal{S} -invariante Menge, so daß die Eigenschaft (IF) gilt. Falls es eine Zahl $d \in (0, n]$ gibt, so daß*

$$\bar{\omega}_d(d_u S_i)^{\frac{1}{d}} > \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (3.5.7)$$

für alle $u \in K$ und alle $i \in \{1, \dots, k\}$ erfüllt ist, dann gilt $\dim_H(K) \leq d$.

Beweis Wir betrachten die oben eingeführte Abbildung φ . Diese ist auf der offenen Menge $U \subset M$ definiert, und K ist eine kompakte Teilmenge von U . Da K als \mathcal{S} -invariant vorausgesetzt wurde, ist K auch φ -invariant. Aufgrund der Eigenschaft (IF) ist $|\det(d_u\varphi)| > 0$ für alle $u \in U$. Außerdem gilt

$$\omega_d(d_u\varphi) = \frac{1}{\overline{\omega}_d(d_{\varphi(u)}S_{i(u)})}$$

für alle $u \in U$. Wegen (3.5.7) gilt damit für alle $u \in K$

$$\omega_d(d_u\varphi)^{\frac{1}{d}} = \frac{1}{\overline{\omega}_d(d_{\varphi(u)}S_{i(u)})^{\frac{1}{d}}} < k^{\frac{1}{n}}.$$

Da φ eine C^1 -Abbildung ist, ist $\omega_d(d\varphi)$ auf K stetig. Aufgrund der Kompaktheit von K gibt es also eine Zahl $\nu \in (0, 1)$ mit

$$\omega_d(d_u\varphi)^{\frac{1}{d}} \leq \nu k^{\frac{1}{n}}.$$

Damit ist die Bedingung (3.4.1) für die Abbildung φ erfüllt, und Satz 3.4.1 liefert $\dim_H(K) \leq d$. ■

Folgerung 3.5.2 *Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^3 -Mannigfaltigkeit, $\mathcal{S} = \{S_i : M \rightarrow M\}_{i=1}^k$ ein iteriertes Funktionensystem und $K \subset M$ eine kompakte \mathcal{S} -invariante Menge, so daß die Eigenschaft (IF) gilt. Falls es eine Zahl $d \in (0, n]$ gibt, so daß*

$$\omega_d(d_u S_i) < \frac{1}{k} \tag{3.5.8}$$

für alle $u \in K$ und alle $i \in \{1, \dots, k\}$ erfüllt ist, so gilt $\dim_H(K) \leq d$.

Beweis Unter den Bedingungen (IF) und (3.5.8) können die Abbildungen $S_i|_K$ auch so zu C^1 -Diffeomorphismen \tilde{S}_i auf eine offene Umgebung \tilde{U}_i von K fortgesetzt werden, daß die Mengen $\tilde{S}_i(\tilde{U}_i)$ paarweise disjunkt sind und es eine offene Umgebung \tilde{U} von K gibt, so daß $\text{cl}(\tilde{U}) \subset \bigcap_{i=1}^k \tilde{U}_i \cap \left(\bigcup_{i=1}^k \tilde{S}_i(\tilde{U}_i) \right)$ kompakt ist und $\bigcup_{i=1}^k \tilde{S}_i(\tilde{U}) \subset \tilde{U}$ gilt. Wir betrachten nun die Abbildung $\tilde{\varphi} : \bigcup_{i=1}^k \tilde{S}_i(\tilde{U}_i) \rightarrow M$, definiert durch

$$\tilde{\varphi}(u) = \tilde{S}_{j(u)}^{-1}(u),$$

wobei $j : \bigcup_{i=1}^k \tilde{S}_i(\tilde{U}) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ zu jedem Punkt $u \in \bigcup_{i=1}^k \tilde{S}_i(\tilde{U}_i)$ den eindeutig bestimmten Index j mit $u \in \tilde{S}_j(\tilde{U}_j)$ liefert. Diese Abbildung $\tilde{\varphi}$ ist damit eine C^1 -Abbildung, definiert auf der offenen Umgebung $\bigcup_{i=1}^k \tilde{S}_i(\tilde{U}_i)$ von K , und K ist invariant unter $\tilde{\varphi}$. Weiterhin ist $\tilde{U} \subset \bigcup_{i=1}^k \tilde{S}_i(\tilde{U}_i)$ eine offene Umgebung von K , die

die Bedingungen des Satzes 3.4.2 für die Abbildung $\tilde{\varphi}$ erfüllt. Für alle $u \in K$ gilt aufgrund von (3.5.8)

$$\overline{\omega}_d(d_u \tilde{\varphi}) = \frac{1}{\omega_d(d_{\tilde{\varphi}(u)} \tilde{S}_{i(u)})} = \frac{1}{\omega_d(d_{\tilde{\varphi}(u)} S_{i(u)})} > k.$$

Da $\tilde{\varphi}$ stetig auf der kompakten Menge K ist, gibt es eine Zahl $\nu \in (0, 1)$ mit

$$\nu \overline{\omega}_d(d_u \tilde{\varphi}) \geq k$$

für alle $u \in K$. Damit ist die Bedingung (3.4.4) für die Abbildung $\tilde{\varphi}$ erfüllt, und Satz 3.4.2 liefert $\dim_H(K) \leq d$. ■

Viele bekannte selbstähnliche Mengen lassen sich durch ein iteriertes Funktionensystem beschreiben, bei dem die Abbildungen S_i kontrahierende Ähnlichkeitsabbildungen sind (siehe z. B. [21]). Als einfaches Beispiel wollen wir hier die Standard-Cantor-Menge C betrachten, die ausgehend vom Einheitsintervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ dadurch entsteht, daß in jedem Schritt aus jedem Intervall das offene mittlere Drittel entfernt wird, d. h., C entsteht als Durchschnitt von Mengen K^i ($i \in \mathbb{N}_0$) mit $K^0 = [0, 1]$, $K^1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, $K^2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ usw. und stimmt damit mit der invarianten Menge K der in Beispiel 2.1.1 betrachteten Zeltabbildung überein.

Die Standard-Cantor-Menge C kann als invariante Menge des iterierten Funktionensystems $\mathcal{S} = \{S_1, S_2\}$ beschrieben werden, wobei $S_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) durch

$$S_1(x) = \frac{1}{3}x \quad \text{und} \quad S_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \quad (3.5.9)$$

definiert sind. Die Eigenschaft (IF) ist hier offensichtlich erfüllt. Betrachtet man in \mathbb{R} die Euklidische Metrik, dann ist der einzige Singulärwert der Tangentialabbildungen $\alpha_1 = \frac{1}{3}$ für alle Punkte aus \mathbb{R} . Die Bedingung (3.5.7) hat damit die Form $\frac{1}{3} > \frac{1}{2}$, das ist offensichtlich nicht erfüllt. Also kann Folgerung 3.5.1 hier nicht angewendet werden. Bedingung (3.5.8) lautet für die Standard-Cantor-Menge

$$\left(\frac{1}{3}\right)^d < \frac{1}{2}, \quad (3.5.10)$$

dieses ist für alle Zahlen $d > \frac{\ln 2}{\ln 3}$ erfüllt. Im Grenzübergang $d \rightarrow \frac{\ln 2}{\ln 3}$ liefert Folgerung 3.5.2 also

$$\dim_H(C) \leq \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

Bekanntlich gilt für die Standard-Cantor-Menge $\dim_H(C) = \frac{\ln 2}{\ln 3}$, also erhalten wir mit Folgerung 3.5.2 hier eine scharfe Abschätzung.

3.5.5 Hufeisenabbildungen

Durch Streckung, Kontraktion und Faltung können bei Flüssen invariante Mengen mit einer sehr komplizierten geometrischen Struktur entstehen. Da Faltungen bei Flüssen injektiv und meist auch differenzierbar sind, können sie nur in Form von hufeisenartigen Poincaré-Abbildungen auftreten. Bei dreidimensionalen dynamischen Systemen sind solche Hufeisenabbildungen schon nachgewiesen worden. Zum Beispiel untersuchte B. Deng in [17] das Faltungsverhalten dreidimensionaler Systeme und zeigte dabei, daß das Rössler-System bei bestimmten Parameterwerten eine Hufeisenabbildung generiert. Auch aus diesem Grund ist es sinnvoll, die Dimension invarianter Mengen von Hufeisen-Abbildungen abzuschätzen. Die folgende Definition lehnt sich an [11] an.

Es bezeichne $I \subset \mathbb{R}$ das Einheitsintervall $[0, 1]$ und $I^m = I \times \dots \times I \subset \mathbb{R}^m$ den m -dimensionalen Einheitswürfel für $m \in \mathbb{N}$. Eine *Hufeisenabbildung* in \mathbb{R}^{m+1} ist eine injektive Abbildung $f : I^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ mit der folgenden Eigenschaft:

- (H1) Es existiert eine Menge $I^* \subset I$ mit $f^{-1}(I^{m+1}) = I^* \times I^m$, die die Vereinigung endlich vieler nichtleerer disjunkter Intervalle $I^* = \bigcup_{i=1}^k I_i$ ($k \geq 2$) ist, so daß f in den Punkten $(x, y) \in I^* \times I^m$ in der Form

$$f(x, y) = (\varphi(x), \psi(x) + \lambda A(x)y)$$

mit einem Parameter $\lambda \in (0, 1)$ und C^1 -Abbildungen $\varphi : I^* \rightarrow I$, $\psi : I^* \rightarrow I^m$ und $A : I^* \rightarrow M_{m,m}(\{-1, 1\})$ dargestellt werden kann. Dabei ist $A(x)$ für jedes $x \in I^*$ eine $m \times m$ -Diagonalmatrix, deren Hauptdiagonale nur die Zahlen 1 und -1 enthält.

Die x -Komponente stellt dabei die eindimensionale Streckungsrichtung dar, und in der y -Komponente werden alle anderen m Raumrichtungen zusammengefaßt, in denen eine Stauchung erfolgt. Da die Abbildung A stetig sein soll, muß A auf jedem Intervall I_i ($i = 1, \dots, k$) konstant sein.

Als Beispiel betrachten wir die in Abb. 3.4 dargestellte Abbildung in \mathbb{R}^2 . Dabei wird das Einheitsquadrat vertikal mit dem Faktor 3 gestreckt, horizontal mit dem Faktor $\frac{2}{5}$ gestaucht und anschließend zu einem Hufeisen gebogen. Da in (H1) die x -Komponente die Streckungsrichtung beschreibt, ist im Beispiel die x -Koordinate vertikal und demzufolge die y -Koordinate horizontal, also genau entgegengesetzt zur üblichen Bezeichnung. Die Menge I^* besteht hier aus den zwei Intervallen $I_1 = [0, \frac{1}{3}]$ und $I_2 = [\frac{5}{6}, 1]$. In den Punkten $(x, y) \in I^* \times I$ läßt sich die Abbildung als

$$f(x, y) = \begin{cases} (3x, \frac{2}{5}y) & \text{für } (x, y) \in I_1 \times I, \\ (\frac{7}{2} - 3x, 1 - \frac{2}{5}y) & \text{für } (x, y) \in I_2 \times I \end{cases}$$

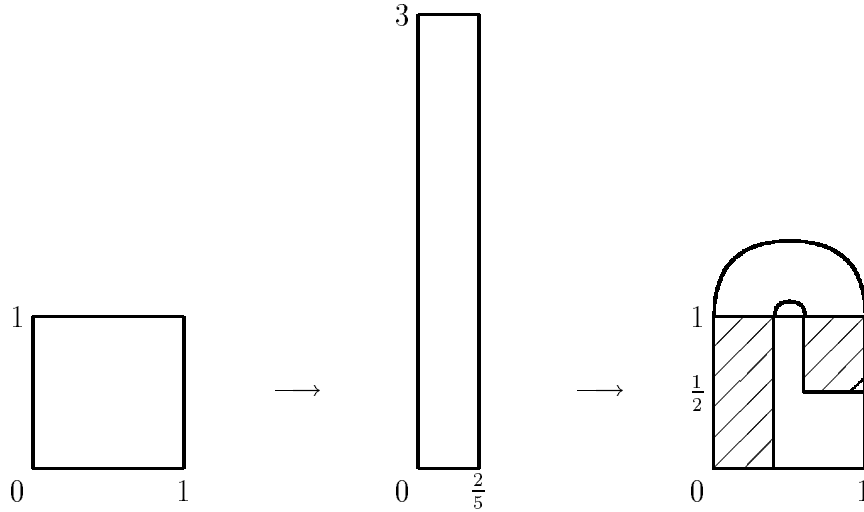


Abbildung 3.4: Beispiel einer Hufeisenabbildung

darstellen. Damit gilt hier $\lambda = \frac{2}{5}$, und die Abbildungen φ , ψ und A haben die Form

$$\varphi(x) = \begin{cases} 3x & \text{für } x \in I_1, \\ \frac{7}{2} - 3x & \text{für } x \in I_2, \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in I_1, \\ 1 & \text{für } x \in I_2, \end{cases} \quad \text{und}$$

$$A(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in I_1, \\ -1 & \text{für } x \in I_2. \end{cases}$$

Für die Abbildung φ gilt hier $\varphi(I_1) = I$, $\varphi(I_2) \subset I$, und $d_x\varphi$ hat in I_1 und I_2 jeweils konstantes Vorzeichen. Die Abbildung ψ ist auf I_1 und I_2 jeweils konstant. Diese Eigenschaften wollen wir allgemein für die hier betrachteten Hufeisenabbildungen voraussetzen:

(H2) Es gilt $\varphi(I_i) = I$ für $i = 1, \dots, k-1$, $\varphi(I_k) \subset I$ und $d_x\varphi$ hat in jedem Intervall I_i ($i = 1, \dots, k$) konstantes Vorzeichen.

In dieser Formulierung ist enthalten, daß $d_x\varphi \neq 0$ für alle $x \in I^*$ gilt. Daraus ergibt sich, daß jeder Punkt aus I unter der Abbildung φ genau ein Urbild in jeder der Mengen I_1, \dots, I_{k-1} und höchstens ein Urbild in I_k hat, wobei mindestens ein Punkt aus I ein Urbild in I_k hat. Für die Vielfachheitsfunktion gilt damit $N(\varphi, I^*, x) \in \{k-1, k\}$ für alle $x \in I$.

(H3) Die Abbildung ψ ist auf den Intervallen I_1, \dots, I_k jeweils konstant.

Unter dieser Voraussetzung existieren Funktionen $\psi_i : I^m \rightarrow I^m$ ($i = 1, \dots, k$) mit $\psi_i(y) = \psi(x) + \lambda A(x)y$ für beliebiges $x \in I_i$ und jedes $y \in I^m$. Jede Abbildung ψ_i ist linear und invertierbar und kann damit zu einem C^1 -Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung von I^m fortgesetzt werden. Da f injektiv ist, gilt $\psi_i(I^m) \cap \psi_j(I^m) = \emptyset$ für $1 \leq i < j \leq k$. Damit existiert eine Art Umkehrabbildung $\tilde{\psi} : \bigcup_{i=1}^k \psi_i(I^m) \rightarrow I^m$ mit $\tilde{\psi}|_{\psi_i(I^m)} = \psi_i^{-1}$. Zum Beispiel ergibt sich für die in Abb. 3.4 dargestellte Hufeisenabbildung $\tilde{\psi} : [0, \frac{2}{5}] \cup [\frac{3}{5}, 1] \rightarrow [0, 1]$ in der Form

$$\tilde{\psi}(y) = \begin{cases} \frac{5}{2}y & \text{für } y \in [0, \frac{2}{5}], \\ \frac{5}{2} - \frac{5}{2}y & \text{für } y \in [\frac{3}{5}, 1]. \end{cases}$$

Die maximale invariante Menge $K := \bigcap_{p=-\infty}^{\infty} f^p(I^* \times I^m)$ der Hufeisenabbildung ist in einer Menge \tilde{K} enthalten, die sich als Kreuzprodukt

$$\tilde{K} = \bigcap_{p=-\infty}^{\infty} \varphi^p(I^*) \times \bigcap_{p=-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}^p(I^m) = \bigcap_{p=-\infty}^0 \varphi^p(I^*) \times \bigcap_{p=-\infty}^0 \tilde{\psi}^p(I^m)$$

schreiben läßt. Da $\tilde{K} \supset K$ gilt, ist eine obere Schranke für die Hausdorff-Dimension von \tilde{K} auch eine obere Abschätzung für die Dimension von K . Es bezeichne $\tilde{K}_\varphi := \bigcap_{p=-\infty}^0 \varphi^p(I^*)$ und $\tilde{K}_{\tilde{\psi}} := \bigcap_{p=-\infty}^0 \tilde{\psi}^p(I^m)$. Dann ist \tilde{K}_φ eine φ -invariante Menge, und $\tilde{K}_{\tilde{\psi}}$ ist $\tilde{\psi}$ -invariant. Deshalb können die Dimensionen dieser Mengen separat abgeschätzt werden.

Betrachten wir zuerst die Abbildung φ . Da diese Abbildung auf einer Teilmenge der eindimensionalen Mannigfaltigkeit \mathbb{R} wirkt, hat ihre Tangentialabbildung genau einen Singulärwert $\alpha_1(d_x\varphi) = |d_x\varphi|$. Wie schon im Abschnitt 3.5.1 erwähnt wurde, kann Satz 3.4.1 im Eindimensionalen nur im trivialen Fall einer nulldimensionalen invarianten Menge angewendet werden. Deshalb betrachten wir hier Satz 3.4.2. Die Abbildung φ ist eine C^1 -Abbildung auf der Vereinigung disjunkter abgeschlossener Intervalle $I^* = \bigcup_{i=1}^k I_i$ mit $d_x\varphi \neq 0$ für alle $x \in I^*$, und jeder Punkt aus I hat höchstens k Urbilder. Damit kann φ in geeigneter Weise auf eine offene Menge $U \supset I^*$ fortgesetzt werden, so daß $d_x\varphi \neq 0$ für alle $x \in U$ gilt und es eine offene Menge $\tilde{U} \supset I^*$ gibt, so daß $\text{cl}(\tilde{U}) \subset U$ kompakt ist und $\varphi^{-1}(\tilde{U}) \subset \tilde{U}$ und $N(\varphi, \tilde{U}, x) \leq k$ für alle $x \in \varphi(\tilde{U})$ gilt. Bedingung (3.4.4) hat damit die Form

$$|d_x\varphi|^d > k$$

für alle $x \in \tilde{K}_\varphi$, das ist für alle $d > \frac{\ln k}{\ln \inf_{x \in \tilde{K}_\varphi} |d_x\varphi|}$ erfüllt. Satz 3.4.2 liefert im

Grenzübergang $d \rightarrow \frac{\ln k}{\ln \inf_{x \in \tilde{K}_\varphi} |d_x \varphi|}$ also

$$\dim_H(\tilde{K}_\varphi) \leq \frac{\ln k}{\ln \inf_{x \in \tilde{K}_\varphi} |d_x \varphi|}. \quad (3.5.11)$$

Dabei kann $\inf_{x \in \tilde{K}_\varphi} |d_x \varphi|$ durch $\inf_{x \in I^*} |d_x \varphi|$ ersetzt werden, falls \tilde{K}_φ nicht explizit bekannt ist, dadurch wird die obere Schranke nur vergrößert. Voraussetzung für diese Abschätzung ist $\inf_{x \in \tilde{K}_\varphi} |d_x \varphi| > k$ bzw. $\inf_{x \in I^*} |d_x \varphi| > k$.

Bemerkung 3.5.1 In Spezialfällen kann diese Abschätzung für die Hausdorff-Dimension noch verbessert werden, wenn die Vielfachheitsfunktion $N(\varphi, \tilde{U}, \cdot)$ nicht global durch k abgeschätzt wird, sondern genau berücksichtigt wird, welche Punkte der Menge \tilde{K}_φ nur $(k-1)$ Urbilder in \tilde{U} haben. Das hängt aber von der jeweiligen Konstruktion der Menge \tilde{U} ab.

Nun betrachten wir die Menge \tilde{K}_ψ . Diese Menge besteht aus k „linearen Kopien“ von sich selbst mit Kontraktionsfaktor λ . Damit gilt nach [21] für ihre Dimensionswerte

$$\dim_H(\tilde{K}_\psi) = \dim_C(\tilde{K}_\psi) = \frac{\ln k}{-\ln \lambda}. \quad (3.5.12)$$

Für die Hausdorff-Dimension liefert Satz 3.4.2 denselben Wert als obere Schranke.

Für Kreuzprodukte beliebiger Mengen $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}^m$ gilt nach [21] die Beziehung

$$\dim_H(A \times B) \leq \dim_H(A) + \overline{\dim}_C(B). \quad (3.5.13)$$

Für die invariante Menge K der Hufeisenabbildung als Teilmenge von $\tilde{K} = \tilde{K}_\varphi \times \tilde{K}_\psi$ ergibt sich damit aus (3.5.11) und (3.5.12)

$$\dim_H(K) \leq \frac{\ln k}{-\ln \lambda} + \frac{\ln k}{\ln \inf_{x \in \tilde{K}_\varphi} |d_x \varphi|}.$$

Diese Abschätzung kann auf die Beispielabbildung aus Abb. 3.4 angewendet werden. Hier ist $k = 2$, $\lambda = \frac{2}{5}$ und $\inf_{x \in \tilde{K}_\varphi} |d_x \varphi| = 3$. Damit ergibt sich für die invariante Menge der Beispielabbildung die obere Schranke

$$\dim_H(K) \leq \frac{\ln 2}{\ln 5 - \ln 2} + \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 1,387.$$

Dieser Wert ist hier der exakte Hausdorff-Dimensionswert für die Menge \tilde{K} , aber nur eine obere Schranke für die Hausdorff-Dimension der invarianten Menge K , die hier eine echte Teilmenge von \tilde{K} ist.

3.5.6 Belykh-Abbildungen

In [8] werden Abbildungen $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ der Form

$$g(\varphi, y) = (\varphi + \tau y - \tau p(F(\varphi) - \gamma), y(1 - \xi\tau) - \tau s(F(\varphi) - \gamma)), \quad (3.5.14)$$

$$\varphi, y \in \mathbb{R},$$

betrachtet, die aus dem Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= y - \tau(F(\varphi) - \gamma) \\ \dot{y} &= -\xi y - s(F(\varphi) - \gamma) \end{aligned} \quad (3.5.15)$$

durch Diskretisierung nach dem Eulerverfahren entstehen. Im Differentialgleichungssystem (3.5.15), das ein System der Phasensynchronisation darstellt, sind $p, s, \xi \in \mathbb{R}_{0+}$ Parameter und $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine 2π -periodische Funktion. Die Zahl $\tau > 0$ in (3.5.14) ist die Diskretisierungsschrittweite. Da φ eine Winkelvariable ist, kann die Abbildung (3.5.14) auf einem durch Faktorisierung des \mathbb{R}^2 entstandenen Zylinder betrachtet werden. Durch Substitutionen

$$\alpha := \tau p, \quad \beta := \tau^2 s, \quad \Lambda := 1 - \xi\tau, \quad y := \tau y \quad (3.5.16)$$

läßt sich die Abbildung (3.5.14) in die Form

$$g(\varphi, y) = ((\varphi + y - \alpha(F(\varphi) - \gamma)) \bmod 2\pi, \Lambda y - \beta(F(\varphi) - \gamma)) \quad (3.5.17)$$

bringen. In [8] wurde für F speziell die Sägezahnfunktion

$$F(\varphi) = 1 - \frac{\varphi}{\pi} \quad (\varphi \bmod 2\pi), \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

betrachtet (siehe Abb. 3.5).

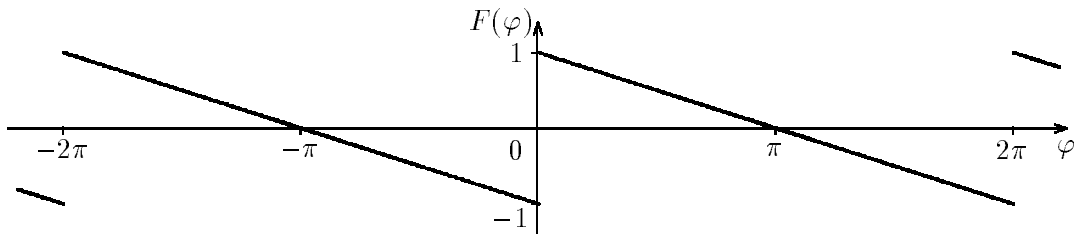


Abbildung 3.5: Sägezahnfunktion

Dann läßt sich die Abbildung (3.5.17) durch die weiteren Substitutionen

$$\varphi := \frac{\varphi - (1 - \gamma)\pi}{2\pi}, \quad y := \frac{y}{2\pi}, \quad c := \frac{1 - \gamma}{2}, \quad \alpha := \frac{\alpha}{\pi} + 1, \quad \beta := \frac{\beta}{\pi} \quad (3.5.18)$$

zur Abbildung

$$g(\varphi, y) = (\alpha\varphi + y, \beta\varphi + \Lambda y) \quad ((\varphi + c) \bmod 1) \quad (3.5.19)$$

vereinfachen. Es seien a und $(-b)$ die Nullstellen der Gleichung

$$x^2 + (\alpha - \Lambda)x - \beta = 0. \quad (3.5.20)$$

Beschränken wir uns im weiteren auf den Fall $s > 0$. Dann ergibt sich aus den Substitutionsvorschriften (3.5.16) und (3.5.18) die Beziehung $\beta > 0$. Somit sind die Nullstellen der Gleichung (3.5.20) reell und haben verschiedenes Vorzeichen, also kann $a, b > 0$ gewählt werden. Durch die erneuten Substitutionen

$$u := \varphi - \frac{y}{a}, \quad v := \varphi + \frac{y}{b}, \quad \lambda := \Lambda - a, \quad \mu := \Lambda + b \quad (3.5.21)$$

erhält man die Abbildung (3.5.19) in der kanonischen Form

$$g(u, v) = (\lambda u, \mu v) \quad \left(\left(\frac{au + bv}{a + b} + c \right) \bmod 1 \right). \quad (3.5.22)$$

Falls zusätzlich $\alpha\Lambda - \beta \neq 0$ vorausgesetzt wird, sind λ und μ ungleich Null. Die Abbildung (3.5.22) wird im weiteren auch als *Belykh-Abbildung* bezeichnet. Eine etwas modifizierte Form dieser Abbildung wurde auch in [65] untersucht. Es sei bemerkt, daß die maximale invariante Menge K dieser Abbildung, an die sich die Bewegungen des Systems mit wachsender Zeit immer mehr annähern, im Fall $\lambda < 1$ und $\mu > 1$ ein quasihyperbolischer Attraktor im Sinne von [3] ist.

Für die Abbildung (3.5.22) wurden in der Literatur bisher nur im volumendissipativen Fall obere Schranken für die Hausdorff-Dimension der Grenzmenge K angegeben. In [8] wurde der Fall $\lambda\mu < 1$ mit $\lambda < \frac{1}{2}$, $\mu \geq 2$ betrachtet und dafür die obere Schranke $\dim_H(K) \leq 1 - \frac{\ln 2}{\ln \lambda}$ ermittelt.

Wir betrachten nun die Faktorisierungsbedingung $(\frac{au+bv}{a+b} + c) \bmod 1$, die aus der Betrachtung von φ als Winkelvariable in (3.5.14) entstanden ist. Diese Bedingung bedeutet, daß die Abbildung (3.5.22) nur auf dem Streifen

$$\left\{ (u, v) \in \mathbb{R} \mid \frac{-c(a+b) - au}{b} \leq v < \frac{(1-c)(a+b) - au}{b} \right\},$$

d. h. auf einem Zylinder Z , zu betrachten ist (siehe Abb. 3.6).

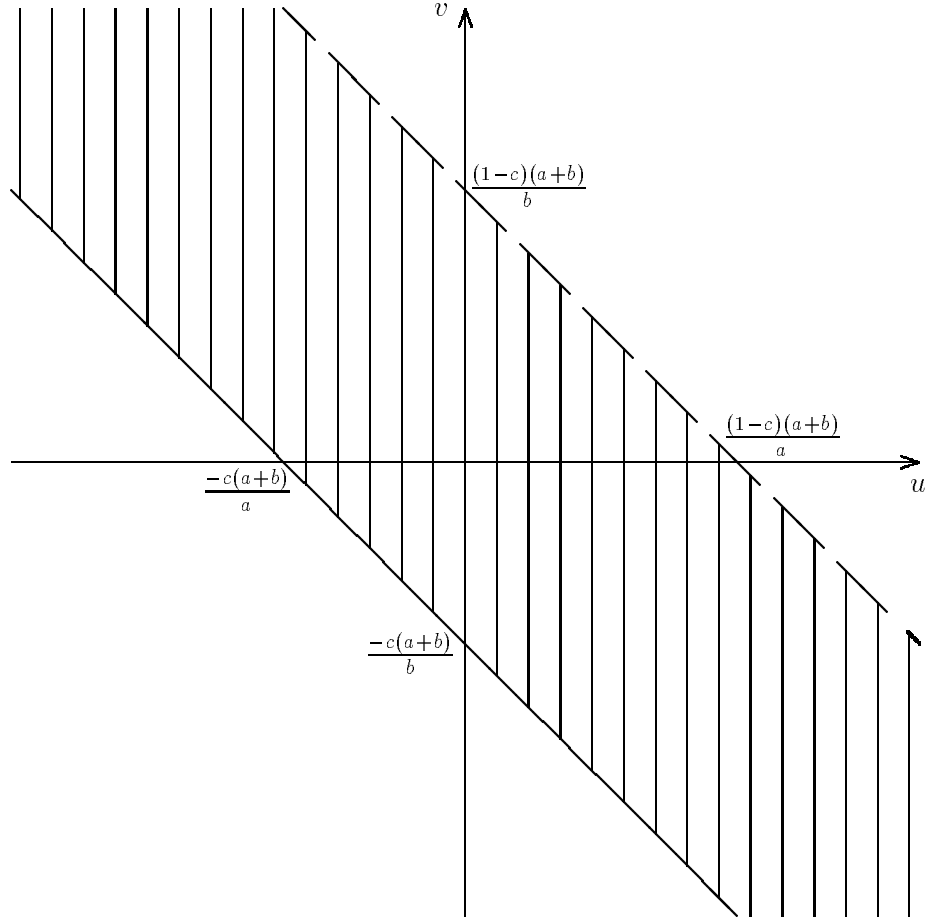


Abbildung 3.6: Definitionsbereich der Belykh-Abbildung

Durch diese Faktorisierung wird in \mathbb{R}^2 die Äquivalenzrelation

$$(u, v) \sim (u', v') \Leftrightarrow u' = u + k, v' = v + k, k \in \mathbb{Z} \quad (3.5.23)$$

induziert. Durch diese Faktorisierung wird aber nicht erreicht, daß die Abbildung g auf dem gesamten Zylinder Z stetig ist. Die Unstetigkeitsstellen liegen auf der Geraden $G := \{(u, v) \in Z \mid v = \frac{-c(a+b)-au}{b}\}$.

Die invariante Menge der Belykh-Abbildung des in Abb. 3.6 dargestellten Streifens ist nicht kompakt. Durch eine weitere Faktorisierung kann die zugrundeliegende Mannigfaltigkeit aber kompaktifiziert werden, indem vom Zylinder zum Torus übergegangen wird. Für diese zweite Faktorisierung werden Zahlen $d \neq e$ gesucht, für die

$$g(u + d, v + e) \sim g(u, v) \quad \text{für alle } u, v \in \mathbb{R}$$

mit der in (3.5.23) definierten Äquivalenzrelation gilt. Die kleinstmöglichen solchen

Zahlen erhält man für

$$g(u + d, v + e) = (\lambda(u + d), \mu(v + e)) = (\lambda u + 1, \mu v + 1),$$

woraus sich $d = \frac{1}{\lambda}$ und $e = \frac{1}{\mu}$ ergeben. Da $a \neq -b$ vorausgesetzt wurde, ist $\lambda \neq \mu$ und folglich auch $d \neq e$. Diese Eigenschaft ist notwendig, damit durch die zusätzliche Faktorisierung wirklich ein Torus entsteht. Wir erhalten insgesamt also die Äquivalenzrelation

$$(u, v) \sim (u', v') \Leftrightarrow u' = u + k + \frac{l}{\lambda}, v' = v + k + \frac{l}{\mu}, k, l \in \mathbb{Z} \quad (3.5.24)$$

in \mathbb{R}^2 , die diesen Raum in einen Torus T überführt. Als Metrik auf T betrachten wir die durch den \mathbb{R}^2 induzierte flache Metrik

$$\varrho([(u, v)], [(w, x)]) = \min_{(u', v') \sim (u, v)} \sqrt{|w - u'|^2 + |x - v'|^2}.$$

Im weiteren werden Punkte $[(u, v)]$ des Torus T auch kurz mit (u, v) bezeichnet.

Es bezeichne \tilde{g} die durch g induzierte Abbildung auf dem Torus T . Aufgrund der Auswahl von d und e gilt

$$(u, v) \sim (u', v') \Rightarrow g(u, v) \sim g(u', v'),$$

so daß \tilde{g} wirklich als Abbildung auf dem Torus T betrachtet werden kann. Die Menge $K = \bigcap_{i=0}^{\infty} \tilde{g}(T)$ ist als abzählbarer Durchschnitt kompakter Mengen wieder kompakt und außerdem invariant unter der Abbildung g . Es bezeichne \tilde{K} das Bild von K unter der Inversen der kanonischen Projektion $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T$, eingeschränkt auf einen maximalen Teil des in Abb. 3.6 Streifens, so daß diese Einschränkung injektiv ist. Dann ist \tilde{K} beschränkt, aber nicht notwendigerweise abgeschlossen. Es gilt jedoch $\dim_H(\tilde{K}) = \dim_H(K)$.

Für jede invariante Menge K' der ursprünglichen Abbildung auf dem in Abb. 3.6 dargestellten Streifen gilt

$$K' \subset \bigcup_{l \in \mathbb{Z}} \left(\tilde{K} + \left(\frac{l}{\lambda}, \frac{l}{\mu} \right) \right).$$

Es sei $K_l = \tilde{K} + \left(\frac{l}{\lambda}, \frac{l}{\mu} \right)$ ($l \in \mathbb{Z}$), und d sei die Hausdorff-Dimension von K . Dann gilt $\dim_H(K_l) = d$ für alle $l \in \mathbb{Z}$. Die Menge K' ist also in einer abzählbaren Vereinigung von kompakten Mengen der Hausdorff-Dimension d enthalten. Nach Lemma 1.7.1 gilt somit $\dim_H(K') \leq d$. Das bedeutet also, daß eine obere Schranke für die maximale invariante Menge K der auf den Torus T eingeschränkten Belykh-Abbildung immer auch eine obere Schranke für jede invariante Menge der ursprünglichen Belykh-Abbildung ist. Deshalb werden wir nun die Hausdorff-Dimension der Menge K abschätzen.

Zur Anwendung der Dimensionsabschätzungen aus Abschnitt 3.4 auf diese Abbildung muß die Anzahl der Urbilder abgeschätzt werden. Für zwei Punkte (u, v) und (u', v') des Torus gilt $\tilde{g}(u, v) = \tilde{g}(u', v')$ genau dann, wenn

$$\lambda u' = \lambda u + \frac{l}{\lambda} + k \quad \text{und} \quad \mu v' = \mu v + \frac{l}{\mu} + k$$

für zwei Zahlen $k, l \in \mathbb{Z}$ ist. Das heißt

$$u' - u = \frac{l}{\lambda^2} + \frac{k}{\lambda} \quad \text{und} \quad v' - v = \frac{l}{\mu^2} + \frac{k}{\mu}.$$

Dabei kann $k = 0$ gesetzt werden, da Punkte, die sich um $\left(\frac{k}{\lambda}, \frac{k}{\mu}\right)$ unterscheiden, nach (3.5.24) äquivalent sind, also dem gleichen Punkt des Torus entsprechen. Es bleibt also noch zu untersuchen, wieviele verschiedene Punkte (u', v') des Torus existieren, die sich von einem vorgegebenen Punkt (u, v) um $\left(\frac{l}{\lambda^2}, \frac{l}{\mu^2}\right)$ mit einer ganzen Zahl l unterscheiden. Dazu kann man für einen beliebigen Punkt $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ die Gerade

$$G' := \left\{ (u, v) + t \left(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\mu^2} \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

betrachten und bestimmen, welche Länge das Geradenstück innerhalb des Streifens (siehe Abb. 3.6) im Verhältnis zum Vektor $w = \left(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\mu^2}\right)$ hat. Die zwei Geraden, die den Streifen begrenzen, sind

$$G = \left\{ \left(\frac{-c(a+b)}{a}, 0 \right) + t \left(-\frac{1}{a}, \frac{1}{b} \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \\ \tilde{G} := \left\{ \left(\frac{(1-c)(a+b)}{a}, 0 \right) + t \left(-\frac{1}{a}, \frac{1}{b} \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ein senkrecht auf diesen Geraden stehender Vektor ist $\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right)$. Einen Vektor in derselben Richtung, der genau die Streifenbreite als Länge hat, erhält man mit Hilfe der Gleichung

$$\left(\frac{-c(a+b)}{a}, 0 \right) + t \left(\frac{1}{b}, \frac{1}{a} \right) = \left(\frac{(1-c)(a+b)}{a}, 0 \right) + s \left(-\frac{1}{a}, \frac{1}{b} \right),$$

d. h. mit Hilfe des Gleichungssystems

$$\frac{-c(a+b)}{a} + \frac{t}{b} = \frac{(1-c)(a+b)}{a} - \frac{s}{a}, \\ \frac{t}{a} = \frac{s}{b},$$

dessen Lösung $t = \frac{ab(a+b)}{a^2+b^2}$ und $s = \frac{b^2(a+b)}{a^2+b^2}$ ist. Der Vektor senkrecht zu G und \tilde{G} , dessen Länge die Streifenbreite ist, lautet damit $w' = \left(\frac{a(a+b)}{a^2+b^2}, \frac{b(a+b)}{a^2+b^2} \right)$. Mit Hilfe dieses

Vektors ergibt sich die Länge des Geradenstücks von G' im Streifen im Verhältnis zum Vektor w einfach als

$$\frac{\langle w, w' \rangle_{\mathbb{R}^2}}{\|w'\|^2} = \frac{\frac{a(a+b)}{\lambda^2(a^2+b^2)} + \frac{b(a+b)}{\mu^2(a^2+b^2)}}{\frac{a^2(a+b)^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{b^2(a+b)^2}{(a^2+b^2)^2}} = \frac{\frac{a}{\lambda^2} + \frac{b}{\mu^2}}{a+b}.$$

Da a und $(-b)$ Nullstellen der Gleichung (3.5.20) sind, gilt $ab = \beta$ und $b - a = \alpha - \Lambda$. Zusammen mit den Substitutionsvorschriften (3.5.21) ergibt sich

$$\frac{\frac{a}{\lambda^2} + \frac{b}{\mu^2}}{a+b} = \frac{\Lambda^2 + \beta}{\lambda^2 + \mu^2}.$$

Damit hat jeder Punkt des Torus T unter der Abbildung \tilde{g} höchstens $\left\lceil \frac{\lambda^2 + \mu^2}{\Lambda^2 + \beta} \right\rceil$ Urbilder. Eine analoge Abschätzung der Vielfachheitsfunktion nach unten ist so einfach nicht möglich, da dafür die invariante Menge K bekannt sein müßte und Urbilder nur in dieser Menge betrachtet werden dürften. Wir können die Anzahl der Urbilder deshalb nur durch 1 nach unten abschätzen.

Auf dem Torus T ist die Abbildung \tilde{g} in den Punkten der Linie $\pi(G)$ nicht stetig. Deshalb können die Sätze aus Abschnitt 3.4 nicht angewendet werden. Wir können aber auch für die Abbildung \tilde{g} , analog zu Abschnitt 3.3, Schrankenaussagen für die Transformation der äußeren Hausdorff-Integrale herleiten. Die Abbildung \tilde{g} ist links und rechts der Linie $\pi(G)$ stetig und kann stetig differenzierbar über die Linie $\pi(G)$ hinaus fortgesetzt werden. Diese Fortsetzungen seien mit \tilde{g}_l und \tilde{g}_r bezeichnet. Auf einer Kugel, die Punkte aus $\pi(G)$ enthält, sind somit beide Abbildungen \tilde{g}_l und \tilde{g}_r zu untersuchen. Auf jeder beliebigen Kugel sind also höchstens zwei Abbildungen zu betrachten. Mit einer Funktion $f : K \rightarrow (0, 1]$, die (3.3.1) erfüllt, erhalten wir dann, analog zu Satz 3.3.1, die Schrankenaussage

$$I_H(\varphi(K), 1, d, \varepsilon) \leq 2 \cdot 16^n n^n I_H \left(K, \max \left\{ f \omega_d(d\varphi)^{\frac{n}{d}}, f^{\frac{d}{n}} \omega_d(d\varphi) \right\}, d, \varepsilon \right).$$

für alle $d \in (0, n]$ und alle hinreichend kleinen Zahlen $\varepsilon > 0$. Für $\tilde{U} := T$ und eine Funktion $f : T \rightarrow (0, 1]$, die (3.3.12) und (3.3.13) erfüllt, gilt, analog zu Satz 3.3.2,

$$I_H(K, f \min\{\overline{\omega}_d(d\varphi)^{\frac{n}{d}}, \overline{\omega}_d(d\varphi)\}, d, \varepsilon) \leq 2 \cdot 16^n n^n I_H(\varphi(K), 1, d, \varepsilon).$$

für alle $d \in (0, n]$ und alle hinreichend kleinen Zahlen $\varepsilon > 0$. In die Beweise der Sätze aus Abschnitt 3.4 gehen Iterierte der Abbildung ein. Für \tilde{g}^p sind dabei im ungünstigsten Fall in jedem Iterationsschritt die zwei Abbildungen \tilde{g}_l und \tilde{g}_r einzubeziehen. Für jede Kugel sind dabei zur Ermittlung ihres Bildes unter der Abbildung \tilde{g} höchstens 2^p verschiedene Abbildungen zu betrachten. Diese Anzahl läßt sich allerdings nicht unabhängig von der Zahl p nach oben abschätzen, so daß wir nicht analog zu [63] vorgehen können. Damit müssen die Bedingungen (3.4.1) und (3.4.4) in der vorliegenden Situation durch

$$\omega_d(d_u \varphi)^{\frac{1}{d}} < \frac{1}{2} N(\tilde{g}, K, \tilde{g}(u))^{\frac{1}{n}} \quad \text{für alle } u \in K \quad (3.5.25)$$

bzw.

$$\overline{\omega}_d(d_u \varphi) > 2N(\tilde{g}, \tilde{U}, \tilde{g}(u)) \quad \text{für alle } u \in K \quad (3.5.26)$$

ersetzt werden. Auf die Konstante $\nu \in (0, 1)$ kann man verzichten, da die Singulärwerte von \tilde{g} sowie von \tilde{g}_l und \tilde{g}_r konstant μ und λ auf dem gesamten Torus sind.

Betrachten wir als erstes (3.5.25). Da wir $N(\tilde{g}, \tilde{U}, \tilde{g}(u))$ nach unten nur durch 1 abschätzen können, hat diese Bedingung die Form

$$\frac{1}{2} > \begin{cases} \mu & \text{für } d \in (0, 1], \\ \mu^{\frac{1}{d}} \lambda^{1-\frac{1}{d}} & \text{für } d \in (1, 2]. \end{cases}$$

Diese Bedingung kann nur für $\lambda\mu < \frac{1}{2}$ erfüllt werden und liefert in diesem Fall $d > \frac{\ln \lambda - \ln \mu}{\ln \lambda + \ln 2}$. Für alle diese Zahlen d bekommen wir, analog zu Satz 3.4.1, die Abschätzung $\dim_H(K) \leq d$. Im Grenzübergang $d \rightarrow \frac{\ln \lambda - \ln \mu}{\ln \lambda + \ln 2}$ heißt das

$$\dim_H(K) \leq \frac{\ln \lambda - \ln \mu}{\ln \lambda + \ln 2} \quad \text{für } \lambda\mu < \frac{1}{2}.$$

Diese Schranke ist größer als diejenige aus [8], da in dieser Situation die Vielfachheit nicht ausgenutzt werden konnte.

Nun betrachten wir die Bedingung (3.5.26). Mit der obigen Abschätzung der Vielfachheitsfunktion hat diese Bedingung die Form

$$2 \left\lceil \frac{\lambda^2 + \mu^2}{\Lambda^2 + \beta} \right\rceil < \begin{cases} \lambda^d & \text{für } d \in (0, 1], \\ \lambda\mu^{d-1} & \text{für } d \in (1, 2]. \end{cases}$$

Damit erhalten wir, analog zu Satz 3.4.2, die Dimensionsabschätzung

$$\dim_H(K) \leq \begin{cases} \frac{\ln \left(2 \left\lceil \frac{\lambda^2 + \mu^2}{\Lambda^2 + \beta} \right\rceil \right)}{\ln \lambda} & \text{für } \lambda > 2 \left\lceil \frac{\lambda^2 + \mu^2}{\Lambda^2 + \beta} \right\rceil, \\ 1 + \frac{\ln \left(2 \left\lceil \frac{\lambda^2 + \mu^2}{\Lambda^2 + \beta} \right\rceil \right) - \ln \lambda}{\ln \mu} & \text{für } \lambda \leq 2 \left\lceil \frac{\lambda^2 + \mu^2}{\Lambda^2 + \beta} \right\rceil < \lambda\mu. \end{cases} \quad (3.5.27)$$

Beispielsweise ergibt sich für die Parameterwerte $\Lambda = 3$, $\alpha = 5$, $\beta = 2$ und die daraus resultierenden Werte $a = 1$, $b = \lambda = 2$, $\mu = 5$ die Abschätzung der Vielfachheitsfunktion $N(\tilde{g}, T, \cdot) \leq \left\lceil \frac{\lambda^2 + \mu^2}{\Lambda^2 + \beta} \right\rceil = 4$, so daß $2 \left\lceil \frac{\lambda^2 + \mu^2}{\Lambda^2 + \beta} \right\rceil < \lambda\mu$ erfüllt ist. Somit ergibt sich

$$\dim_H(K) \leq 1 + \frac{\ln \left(\left\lceil \frac{\lambda^2 + \mu^2}{\Lambda^2 + \beta} \right\rceil \right) - \ln \lambda}{\ln \mu} = 1 + \frac{\ln 8 - \ln 2}{\ln 5} = 1 + \frac{\ln 4}{\ln 5} \approx 1,861.$$

Es sei bemerkt, daß die zu Satz 3.4.2 analoge Abschätzung (3.5.27) der Hausdorff-Dimension invarianter Mengen von Belykh-Abbildungen die Ergebnisse aus [8] ergänzt, da zur Anwendung von (3.5.27) immer $\lambda\mu \geq 2$ gelten muß, die Abbildung also volumenexpansiv sein muß.

Kapitel 4

Dynamische Systeme mit einer äquivarianten Zerlegung des Tangentialbündels

In diesem Kapitel werden zunächst invertierbare dynamische Systeme betrachtet. Es wird gezeigt, wie das Konzept der hyperbolischen Mengen für Diffeomorphismen und Flüsse für den Zweck der Dimensionsabschätzung abgeschwächt werden kann, indem nur noch vorausgesetzt wird, daß eine äquivariante Zerlegung des Tangentialbündels existiert, wie sie in Abschnitt 1.9 eingeführt wurde. Die in [72] betrachteten pseudohyperbolischen Mengen sind zum Beispiel Mengen mit einer äquivarianten Zerlegung des Tangentialbündels, die nicht im klassischen Sinne hyperbolisch sind. Für solche Mengen mit einer äquivarianten Zerlegung des Tangentialbündels sind in Abschnitt 1.9, in Analogie zu hyperbolischen Mengen, eine Singulärwertfunktion und globale Lyapunov-Exponenten definiert worden, die nun im weiteren Verwendung finden. Es wird gezeigt, wie unter diesen abgeschwächten Voraussetzungen analoge Dimensionsabschätzungen wie für hyperbolische Mengen (siehe [29]) erreicht werden können. Im zweiten Teil des Kapitels wird diese Vorgehensweise auf eine spezielle Klasse von nicht injektiven Abbildungen, die sogenannten k -1-Endomorphismen, ausgeweitet. Der wesentliche Inhalt dieses Kapitels ist in [26] dargestellt.

4.1 Invertierbare dynamische Systeme

Für invariante Mengen invertierbarer dynamischer Systeme mit einer äquivarianten Zerlegung des Tangentialbündels läßt sich die Hausdorff-Dimension nach oben mit Hilfe der Singulärwertfunktion und der topologischen Entropie abschätzen:

Satz 4.1.1 *Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^3 -Mannigfaltigkeit, $K \subset M$ eine kompakte Menge, $\Gamma \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{R}\}$ eine Zeitmenge und $\varphi^{(\cdot)}(\cdot) : \Gamma \times K \rightarrow K$*

ein C^1 -glattes dynamisches System auf K , so daß für K eine äquivariante Zerlegung des Tangentialbündels $T_K M = E^1 \oplus E^2 \oplus E^3$ existiert, wobei E^j ein n_j -dimensionales Bündel ist ($j = 1, 2, 3$, $n_1 + n_2 + n_3 = n$). Falls für Zahlen $d \in (0, n - n_3]$ und $t \in \Gamma$ die Ungleichung

$$\omega_{d,K}^{E^1, E^2, E^3}(\varphi^t) < e^{-2h_{\text{top}}(\varphi^t|_K)}, \quad (4.1.1)$$

erfüllt ist, so gilt $\dim_H(K) \leq d + n_3$.

Beweis Es bezeichne der Kürze halber $\lambda := h_{\text{top}}(\varphi^t|_K)$ die topologische Entropie des C^1 -Diffeomorphismus φ^t auf K . Für $\tilde{l} := \omega_{d,K}^{E^1, E^2, E^3}(\varphi^t)$ gilt also laut Voraussetzung $\tilde{l} < e^{-2\lambda}$, und da φ^t ein Diffeomorphismus auf einer offenen Menge $U_t \supset K$ ist, ist $\tilde{l} > 0$. Also existiert eine Zahl l mit $\tilde{l} < l < e^{-2\lambda}$. Nach Lemma 1.9.1 gilt dann

$$\omega_{d,K}^{E^1, E^2, E^3}(\varphi^{pt}) \leq \tilde{l}^p < l^p$$

für alle $p \in \mathbb{N}$.

Nun sei $p \in \mathbb{N}$ eine beliebige, aber festgehaltene Zahl. Dann existiert eine hinreichend große Zahl $m > 1$, so daß die Ungleichungen

$$\tilde{l}^p < m^d, \quad \sup_{u \in K} \|d_u \varphi^{pt}\| \leq m \quad \text{und} \quad \sup_{u \in K} \|d_u \varphi^{-pt}\| \leq m \quad (4.1.2)$$

gelten, wobei $\|d_u \varphi^{pt}\|$ bzw. $\|d_u \varphi^{-pt}\|$ die Operatornorm des linearen Operators $d_u \varphi^{pt} : T_u M \rightarrow T_{\varphi^{pt}(u)}$ bzw. $d_u \varphi^{-pt} : T_u M \rightarrow T_{\varphi^{-pt}(u)}$ bezeichne. Die Zahl $\eta > 0$ sei die Lösung der Gleichung

$$\left[1 + \left(\frac{m^{\lfloor d \rfloor}}{\tilde{l}^p} \right)^{1/(d - \lfloor d \rfloor)} \eta \right]^d \tilde{l}^p = l^p. \quad (4.1.3)$$

Weiterhin sei $r_1 > 0$ so klein gewählt, daß es kleiner als das in Satz 1.3.4 eingeführte ε_0 für die Abbildung φ^{pt} ist und es eine offene Menge V mit $K \subset V \subset U_t$ gibt, so daß

$$\|\tau_{\varphi^{pt}(u)}^{\varphi^{pt}(u)} d_v \varphi^{pt} \tau_u^v - d_u \varphi^{pt}\| \leq \eta \quad \text{und} \quad \|\tau_{\varphi^{-pt}(u)}^{\varphi^{-pt}(u)} d_v \varphi^{-pt} \tau_u^v - d_u \varphi^{-pt}\| \leq \eta \quad (4.1.4)$$

für alle $u, v \in K$ mit $\varrho(u, v) \leq r_1$ gelten. Analog zum Beweis von Satz 3.3.1 gibt es Zahlen $r_2, r_3 > 0$, so daß jede Kugel $B(u, r_2)$ mit Radius r_2 um einen Punkt $u \in V$, die Punkte aus K enthält, vollständig in V enthalten ist und

$$\varrho(\exp_u v, \exp_u w) \leq 2\varrho(v, w) \quad (4.1.5)$$

für beliebiges $u \in K$ und alle $v, w \in B(O_u, r_3)$ gilt. Wir setzen

$$r_0 := \min \left\{ r_1, r_2, \frac{r_3}{6\sqrt{\lfloor d \rfloor + 1} + 3m + \eta} \right\}$$

und betrachten ein festes $\varepsilon \in (0, r_0)$. Es sei $\{B^p(u_i, r_i)\}_{i \in I}$ eine endliche Überdeckung von K mit Bowen-Kugeln der Ordnung p bezüglich der Abbildung φ^t um Punkte $u_i \in K$ und mit Radien $r_i \leq \varepsilon$. Aufgrund der Beziehung (1.8.1) gilt $B^p(u_i, r_i) \subset B(u_i, r_i)$ und damit

$$\exp_{u_i}^{-1}(B^p(u_i, r_i)) \subset \exp_{u_i}^{-1}(B(u_i, r_i))$$

für alle $i \in I$. Wegen $r_i \leq r_2$ ist für alle $i \in I$ die Bowen-Kugel $B^p(u_i, r_i)$ vollständig in V enthalten. Weiterhin folgt aus (1.8.1) die Inklusion $B^p(u_i, r_i) \subset \varphi^{pt}(B(\varphi^{-pt}(u_i), r_i))$, und die Taylor-Formel (Satz 1.3.4), angewandt auf die differenzierbare Abbildung φ^{pt} , liefert

$$\begin{aligned} & \| \exp_{u_i}^{-1} \varphi^{pt}(v) - d_{\varphi^{-pt}(u_i)} \varphi^{pt}(\exp_{\varphi^{-pt}(u_i)}^{-1}(v)) \| \\ & \leq \sup_{w \in B(\varphi^{-pt}(u_i), r_i)} \| \tau_{\varphi^{pt}(w)}^{\varphi^{pt}(u_i)} d_w \varphi^{pt} \tau_{u_i}^w - d_{u_i} \varphi^{pt} \| \cdot \| \exp_{\varphi^{-pt}(u_i)}^{-1}(w) \| \end{aligned}$$

für alle $v \in B(\varphi^{-pt}(u_i), r_i)$. Zusammen mit (4.1.4) ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \exp_{u_i}^{-1}(B^p(u_i, r_i)) & \subset \exp_{u_i}^{-1}(\varphi^{pt}(B(\varphi^{-pt}(u_i), r_i))) \\ & \subset d_{\varphi^{-pt}(u_i)} \varphi^{pt}(B(O_{\varphi^{-pt}(u_i)}, r_i)) + B(O_{u_i}, \eta r_i). \end{aligned}$$

Analog gilt

$$\exp_{u_i}^{-1}(B^p(u_i, r_i)) \subset d_{\varphi^{pt}(u_i)} \varphi^{-pt}(B(O_{\varphi^{pt}(u_i)}, r_i)) + B(O_{u_i}, \eta r_i).$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned} & \exp_{u_i}^{-1}(B^p(u_i, r_i)) \\ & \subset (d_{\varphi^{-pt}(u_i)} \varphi^{pt}(B(O_{\varphi^{-pt}(u_i)}, r_i)) \cap d_{\varphi^{pt}(u_i)} \varphi^{-pt}(B(O_{\varphi^{pt}(u_i)}, r_i)) \cap \exp_{u_i}^{-1}(B(u_i, r_i))) \\ & \quad + B(O_{u_i}, \eta r_i) \\ & \subset (\pi_1(d_{\varphi^{-pt}(u_i)} \varphi^{pt}(B(O_{\varphi^{-pt}(u_i)}, r_i))) \oplus \pi_2(d_{\varphi^{pt}(u_i)} \varphi^{-pt}(B(O_{\varphi^{pt}(u_i)}, r_i)))) \\ & \quad \oplus \pi_3(\exp_{u_i}^{-1}(B(u_i, r_i))) + B(O_{u_i}, \eta r_i), \end{aligned}$$

wobei π_j die Projektion von $T_K M$ auf E^j bezeichnet ($j = 1, 2, 3$). Für jedes $i \in I$ ist die Menge

$$\mathcal{E}_i^1 = \pi_1(d_{\varphi^{-pt}(u_i)} \varphi^{pt}(B(O_{\varphi^{-pt}(u_i)}, r_i)))$$

als Projektion eines Ellipsoids auch ein Ellipsoid und liegt in $E_{u_i}^1$. Analog ist

$$\mathcal{E}_i^2 = \pi_2(d_{\varphi^{pt}(u_i)}\varphi^{-pt}(B(O_{\varphi^{pt}(u_i)}, r_i)))$$

ein Ellipsoid in $E_{u_i}^2$, und

$$\mathcal{E}_i^3 = \pi_3(\exp_{u_i}^{-1}(B(u_i, r_i)))$$

ist eine Kugel vom Radius r_i in $E_{u_i}^3$, also kann diese Menge auch als Ellipsoid betrachtet werden. Aufgrund von $\omega_{d,K}^{E^1, E^2, E^3}(\varphi^{pt}) \leq \tilde{l}^p$ gilt $\omega_d^{E_{u_i}^1, E_{u_i}^2}(\mathcal{E}_i^1 \oplus \mathcal{E}_i^2) \leq \tilde{l}^p r_i^d$, und wegen $\tilde{l}^p < 1$ ergibt sich daraus

$$\omega_{d+n_3}^{E_{u_i}^1, E_{u_i}^2, E_{u_i}^3}(\mathcal{E}_i^1 \oplus \mathcal{E}_i^2 \oplus \mathcal{E}_i^3) \leq \tilde{l}^p r_i^{d+n_3}.$$

Aus (4.1.2) folgt, daß die Längen der Halbachsen von \mathcal{E}_i^1 , \mathcal{E}_i^2 und \mathcal{E}_i^3 höchstens mr_i betragen. Aufgrund von Lemma 1.9.2 und der Beziehung (4.1.3) existieren Ellipsoide $\mathcal{E}_i^{1'} \subset E_{u_i}^1$, $\mathcal{E}_i^{2'} \subset E_{u_i}^2$ und $\mathcal{E}_i^{3'} \subset E_{u_i}^3$ mit

$$\exp_{u_i}^{-1}(B^p(u_i, r_i)) \subset \mathcal{E}_i^{1'} \oplus \mathcal{E}_i^{2'} \oplus \mathcal{E}_i^{3'}$$

und

$$\omega_{d+n_3}^{E_{u_i}^1, E_{u_i}^2, E_{u_i}^3}(\mathcal{E}_i^{1'} \oplus \mathcal{E}_i^{2'} \oplus \mathcal{E}_i^{3'}) \leq l^p r_i^{d+n_3}. \quad (4.1.6)$$

Die Anzahl der Bowen-Kugeln der Ordnung p , die zur Überdeckung von K notwendig sind, ist gleich der kleinsten Mächtigkeit $N_{2p+1}(K, \varepsilon)$ einer $(2p+1, \varepsilon)$ -aufspannenden Menge für K bezüglich φ^t . Also kann K schon durch $N_{2p+1}(K, \varepsilon)$ Mengen $\exp_{u_i}(\mathcal{E}_i^{1'} \oplus \mathcal{E}_i^{2'} \oplus \mathcal{E}_i^{3'})$ mit $\omega_d^{E_{u_i}^1, E_{u_i}^2, E_{u_i}^3}(\mathcal{E}_i^{1'} \oplus \mathcal{E}_i^{2'} \oplus \mathcal{E}_i^{3'}) \leq l^p r_i^{d+n_3}$ überdeckt werden, d. h. $|I| \leq N_{2p+1}(K, \varepsilon)$.

Wir betrachten nun ein festes $i \in I$. Es seien $a_1^j \geq a_2^j \geq \dots \geq a_{n_j}^j$ die Längen der Halbachsen des Ellipsoids $\mathcal{E}_i^{j'}$ ($j = 1, 2, 3$). Da jedes dieser Ellipsoide eine Kugel vom Radius ηr_i enthält, sind alle Halbachsenlängen positiv. Die Menge $\{a_1^1, \dots, a_{n_1}^1, a_1^2, \dots, a_{n_2}^2, a_1^3, \dots, a_{n_3}^3\}$ werde zu $\{a_1, \dots, a_n\}$ mit $a_1 \geq \dots \geq a_n$ umgeordnet. Die Zahlen d_1, d_2, d_3 mögen die Anzahl der Halbachsenlängen aus $\{a_1, \dots, a_{[d]+n_3}\}$ bezeichnen, die jeweils zu den Ellipsoiden $\mathcal{E}_i^{1'}$, $\mathcal{E}_i^{2'}$ und $\mathcal{E}_i^{3'}$ gehören. Weiterhin sei $\zeta := a_{[d]+n_3+1}$. Mit (4.1.6) erhalten wir

$$\zeta \leq \left(\omega_{d+n_3}^{E_{u_i}^1, E_{u_i}^2, E_{u_i}^3}(\mathcal{E}_i^{1'} \oplus \mathcal{E}_i^{2'} \oplus \mathcal{E}_i^{3'}) \right)^{\frac{1}{d+n_3}} \leq (l^p r_i^{d+n_3})^{\frac{1}{d+n_3}} < r_i \leq \varepsilon. \quad (4.1.7)$$

Aufgrund von Lemma 1.2.3 kann das Ellipsoid $\mathcal{E}_i^{j'}$ durch $N_j = \frac{2^{d_j} \omega_{d_j}(\mathcal{E}_i^{j'})}{\zeta^{d_j}}$ Kugeln vom Radius $\zeta \sqrt{d_j + 1}$ überdeckt werden ($j = 1, 2, 3$). Damit kann $\mathcal{E}_i^{1'} \oplus \mathcal{E}_i^{2'} \oplus \mathcal{E}_i^{3'}$ schon durch $N_1 N_2 N_3$ Kugeln vom Radius $3\zeta \sqrt{[d] + 1}$ überdeckt werden. Jede dieser Kugeln,

die Punkte der Menge $\exp_{u_i}^{-1}(B^p(u_i, r_i))$ enthält, liegt dabei innerhalb einer Kugel vom Radius $(6\sqrt{[d] + 1} + 3m + \eta)\varepsilon < r_3$ um O_{u_i} . Aus (4.1.5) folgt dann, daß die Menge $B^p(u_i, r_i)$ durch $N_1 N_2 N_3$ Kugeln vom Radius $6\zeta\sqrt{[d] + 1}$ überdeckt werden kann. Mit (4.1.7) folgt daraus

$$\begin{aligned}
& \mu_H(B^p(u_i, r_i), d + n_3, 6\varepsilon\sqrt{[d] + 1}) \\
& \leq N_1 N_2 N_3 (6\zeta\sqrt{[d] + 1})^{d+n_3} \\
& = \frac{2^{d_1} \omega_{d_1}(\mathcal{E}_i^{1'})}{\zeta^{d_1}} \frac{2^{d_2} \omega_{d_2}(\mathcal{E}_i^{2'})}{\zeta^{d_2}} \frac{2^{d_3} \omega_{d_3}(\mathcal{E}_i^{3'})}{\zeta^{d_3}} 6^{d+n_3} \zeta^{d+n_3} ([d] + 1)^{\frac{d+n_3}{2}} \\
& = \frac{2^{[d]+n_3} a_1 \dots a_{[d]+n_3}}{\zeta^{[d]+n_3}} 6^{d+n_3} \zeta^{d+n_3} ([d] + 1)^{\frac{d+n_3}{2}} \\
& = 6^{d+n_3} 2^{[d]+n_3} ([d] + 1)^{\frac{d+n_3}{2}} a_1 \dots a_{[d]+n_3} \zeta^s \\
& = 6^{d+n_3} 2^{[d]+n_3} ([d] + 1)^{\frac{d+n_3}{2}} \omega_{d+n_3}^{E_{u_i}^1, E_{u_i}^2, E_{u_i}^3}(\mathcal{E}_i^{1'} \oplus \mathcal{E}_i^{2'} \oplus \mathcal{E}_i^{3'}).
\end{aligned}$$

Unter Ausnutzung von (4.1.6) erhält man aus der letzten Beziehung

$$\begin{aligned}
& \mu_H(B^p(u_i, r_i), d + n_3, 6\varepsilon\sqrt{[d] + 1}) \\
& \leq 6^{d+n_3} 2^{[d]+n_3} ([d] + 1)^{\frac{d+n_3}{2}} l^p r_i^{d+n_3} \\
& \leq 6^{d+n_3} 2^{[d]+n_3} ([d] + 1)^{\frac{d+n_3}{2}} l^p \varepsilon^{d+n_3}.
\end{aligned}$$

Da diese Ungleichung für alle $i \in I$ gilt, ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \mu_H(K, d + n_3, 6\varepsilon\sqrt{[d] + 1}) \\
& \leq \sum_{i \in I} \mu_H(B^p(u_i, r_i), d + n_3, 6\varepsilon\sqrt{[d] + 1}) \\
& \leq N_{2p+1}(K, \varepsilon) 6^{d+n_3} 2^{[d]+n_3} ([d] + 1)^{\frac{d+n_3}{2}} l^p \varepsilon^{d+n_3}.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Definition der topologischen Entropie von φ^t auf K gibt es zu beliebigem $\alpha > 0$ Zahlen $\varepsilon_0(\alpha) > 0$ und $p_0(\alpha, \varepsilon) \in \mathbb{N}$, so daß

$$N_{2p+1}(K, \varepsilon) < e^{p(2\lambda+\alpha)}$$

für $0 < \varepsilon < \varepsilon_0(\alpha)$ und $p > p_0(\alpha, \varepsilon)$ gilt. Also ist

$$\mu_H(K, d + n_3, 6\varepsilon\sqrt{[d] + 1}) < e^{p(2\lambda+\alpha)} 6^{d+n_3} 2^{[d]+n_3} ([d] + 1)^{\frac{d+n_3}{2}} l^p \varepsilon^{d+n_3}.$$

Da wegen $l < e^{-2\lambda}$ auch $2\lambda + \ln l < 0$ ist, können wir $\alpha > 0$ so klein wählen, daß auch $2\lambda + \ln l + \alpha < 0$ gilt. Dann ist für $0 < \varepsilon < \min\{r_0, \varepsilon_0(\alpha)\}$ und $p > p_0(\alpha, \varepsilon)$

$$\mu_H(K, d + n_3, 6\varepsilon\sqrt{[d] + 1}) < e^{p(2\lambda + \ln l + \alpha)} 6^{d+n_3} 2^{[d]+n_3} ([d] + 1)^{\frac{d+n_3}{2}} \varepsilon^{d+n_3}.$$

Für $p \rightarrow \infty$ geht die rechte Seite dieser Ungleichung gegen Null, so daß sich daraus $\mu_H(K, d + n_3, 6\varepsilon\sqrt{[d] + 1}) = 0$ und damit $\mu_H(K, d + n_3) = 0$ ergeben. Letzteres bedeutet $\dim_H(K) \leq d + n_3$. ■

Betrachtet man das Langzeitverhalten des dynamischen Systems, so läßt sich eine zu Satz 4.1.1 analoge Aussage in der Sprache der bezüglich einer äquivarianten Zerlegung des Tangentialbündels gebildeten globalen Lyapunov-Exponenten aus Abschnitt 1.9 formulieren:

Folgerung 4.1.1 *Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^3 -Mannigfaltigkeit, $K \subset M$ eine kompakte Menge, $\Gamma \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{R}\}$ eine Zeitmenge und $\varphi^{(\cdot)}(\cdot) : \Gamma \times K \rightarrow K$ ein C^1 -glattes dynamisches System auf K , so daß für K eine äquivariante Zerlegung des Tangentialbündels $T_K M = E^1 \oplus E^2 \oplus E^3$ existiert, wobei E^j ein n_j -dimensionales Bündel ist ($j = 1, 2, 3$, $n_1 + n_2 + n_3 = n$). Weiterhin seien $\nu_1^u, \dots, \nu_{n-n_3}^u$ die globalen Lyapunov-Exponenten von φ auf K bezüglich der Zerlegung $E^1 \oplus E^2 \oplus E^3$, und $D \in \{0, \dots, n - n_3 - 1\}$ sei die kleinste Zahl mit der Eigenschaft*

$$2h_{\text{top}}(\varphi|_K) + \nu_1^u + \dots + \nu_D^u + \nu_{D+1}^u < 0. \quad (4.1.8)$$

$$\text{Dann gilt } \dim_H(K) \leq D + n_3 + \frac{2h_{\text{top}}(\varphi|_K) + \nu_1^u + \dots + \nu_D^u}{|\nu_{D+1}^u|}.$$

Beweis Wie in Abschnitt 1.9 bemerkt wurde, sind die dort definierten globalen Lyapunov-Exponenten reelle Zahlen. Es sei wieder $\lambda := h_{\text{top}}(\varphi|_K)$. Wegen $\lambda \geq 0$ folgt aus Bedingung (4.1.8) $\nu_{D+1}^u < 0$ und damit $\nu_m^u < 0$ für alle $m = D + 1, \dots, n - n_3$. Nun sei $d \in \left(D + \frac{2\lambda + \nu_1^u + \dots + \nu_D^u}{|\nu_{D+1}^u|}, n - n_3\right]$ eine beliebige Zahl. Dann gilt

$$2\lambda + \nu_d \leq 2\lambda + \nu_1^u + \dots + \nu_{[d]}^u + s\nu_{[d]+1}^u < 0.$$

Also können wir eine Zahl $\varepsilon > 0$ so klein wählen, daß $\nu_d + \varepsilon < -2\lambda$ gilt. Wegen (1.9.2) gibt es eine positive Zahl $t \in \Gamma$ mit $\frac{1}{t} \ln \omega_{d,K}^{E^1, E^2, E^3}(\varphi^t) < \nu_d + \varepsilon$. Für dieses t gilt demzufolge

$$\omega_{d,K}^{E^1, E^2, E^3}(\varphi^t) < e^{t(\nu_d + \varepsilon)} < e^{-2t\lambda}.$$

Aufgrund von Lemma 1.8.1 sind damit die Bedingungen von Satz 4.1.1 für die Abbildung φ^t erfüllt, und wir erhalten für jedes $d \in \left(D + \frac{2\lambda + \nu_1^u + \dots + \nu_D^u}{|\nu_{D+1}^u|}, n - n_3\right]$ die Abschätzung $\dim_H(K) \leq d + n_3$. Im Grenzübergang $d \rightarrow D + \frac{2\lambda + \nu_1^u + \dots + \nu_D^u}{|\nu_{D+1}^u|}$ heißt das $\dim_H(K) \leq D + n_3 + \frac{2h_{\text{top}}(\varphi|_K) + \nu_1^u + \dots + \nu_D^u}{|\nu_{D+1}^u|}$. ■

Bemerkung 4.1.1 Die Folgerung 4.1.1 stellt eine zum Satz 1.9.2 aus [29] analoge Dimensionsabschätzung dar. Im Unterschied zu [29] werden hier allerdings wesentlich schwächere Bedingungen an das dynamische System gestellt: Das dynamische System muß nicht im strengen Sinne hyperbolisch sein, sondern es ist ausreichend, daß eine äquivariante Zerlegung des Tangentialbündels existiert. Der Fall der hyperbolischen Mengen ist für $E^1 = E^s$, $E^2 = E^u$ und $E^3 = E^0$ in der Folgerung 4.1.1 mit enthalten. Aber auch für streng hyperbolische Mengen ergeben sich in Folgerung 4.1.1 schwächere Voraussetzungen als in Satz 1.9.2. So kann aufgrund einer anderen Beweistechnik auf die „pinching condition“ verzichtet werden. Da die Taylor-Formel im Beweis nur bis zum Restglied erster Ordnung verwendet wird, ist es außerdem ausreichend, die Glattheitsforderung C^1 an das dynamischen System φ zu stellen.

4.2 Die Klasse der k -1-Endomorphismen

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels soll nun gezeigt werden, wie sich die Dimensionsabschätzung für Mengen mit einer äquivarianten Zerlegung des Tangentialbündels auch auf eine spezielle Klasse nicht invertierbarer dynamischer Systeme, die sogenannten k -1-Endomorphismen, anwenden läßt. Die Klasse der k -1-Endomorphismen ist in [54] eingeführt worden und in [24, 26, 55] weiter untersucht worden.

Definition 4.2.1 *Es sei (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ein **k -1-Endomorphismus-System** $(\varphi, K, K_1, \dots, K_k)$ ist ein $(k+2)$ -Tupel ($k \in \mathbb{N}$), bestehend aus einer Abbildung $\varphi : K \rightarrow M$ und $(k+1)$ kompakten Mengen $K \subset M$, $K_1 \subset M, \dots, K_k \subset M$ mit $K = \bigcup_{i=1}^k K_i$, $\varphi(K_i) = K$ für alle $i = 1, \dots, k$ und $K_i \cap K_j = \emptyset$ für alle $1 \leq i < j \leq k$. Die Abbildung φ heißt dann **k -1-Endomorphismus**.*

Aus dieser Definition folgt $\varphi(K) = K$, d. h., die Menge K ist invariant unter der Abbildung φ . Desweiteren hat jeder Punkt der Menge K mindestens k verschiedene Urbilder, nämlich jeweils mindestens eins in jeder der Mengen K_i ($i = 1, \dots, k$). Diese Eigenschaft ist ausschlaggebend für die Bezeichnung k -1-Endomorphismus, denn k verschiedene Punkte werden jeweils auf denselben Bildpunkt abgebildet. Falls die Mannigfaltigkeit wenigstens C^1 -glatt ist, können wir für ein k -1-Endomorphismus-System die folgende Eigenschaft definieren, die sicherstellt, daß jeder Punkt der Menge K genau k Urbilder in K besitzt:

(C1) Jede Teilabbildung $\varphi|_{K_i}$ kann zu einem C^1 -Diffeomorphismus φ_i auf eine offene Umgebung $U_i \subset M$ von K_i fortgesetzt werden ($i = 1, \dots, k$).

Da die Mengen K_1, \dots, K_k kompakt und paarweise disjunkt sind, können die in (C1) definierten Umgebungen U_1, \dots, U_k auch paarweise disjunkt gewählt werden. Damit

kann die Abbildung φ zu einer C^1 -Abbildung auf der offenen Menge $U = \bigcup_{i=1}^k U_i$ fortgesetzt werden, die auf der Menge U_i jeweils mit φ_i übereinstimmt ($i = 1, \dots, k$). Diese Fortsetzung soll im weiteren auch mit φ bezeichnet werden. Da diese Fortsetzung auf einer Umgebung von K eine C^1 -Abbildung ist, ist für k -1-Endomorphismen mit der Eigenschaft (C1) eine äquivariante Zerlegung des Tangentialbündels $T_K M$ wie in Abschnitt 1.9 definiert.

Die folgenden Beispiele zeigen Vertreter der Klasse der k -1-Endomorphismen, für die eine äquivariante Zerlegung des Tangentialbündels existiert.

Beispiel 4.2.1 Betrachten wir als einfachsten Vertreter wieder die Zeltabbildung in $M = \mathbb{R}$ aus Beispiel 2.1.1 mit der dort konstruierten invarianten Menge K .

Es seien $K_1 := K \cap [0, \frac{1}{3}]$ und $K_2 := K \cap [\frac{2}{3}, 1]$. Als Durchschnitt zweier kompakter Mengen sind diese Mengen auch kompakt. Sie sind disjunkt, bilden in ihrer Vereinigung die gesamte Menge K , und es gilt $\varphi(K_1) = \varphi(K_2) = K$. Damit ist (φ, K, K_1, K_2) ein 2-1-Endomorphismus-System.

Jede Teilabbildung $\varphi|_{K_i}$ ($i = 1, 2$) ist linear und invertierbar und kann damit zu einem C^1 -Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung von K_i fortgesetzt werden. Damit ist die Eigenschaft (C1) erfüllt. Da die Mannigfaltigkeit M hier nur eindimensional ist, ist nur eine triviale äquivariante Zerlegung des Tangentialbündels möglich, bei der ein Teilbündel das gesamte Tangentialbündel ist und jedes weitere Teilbündel jeweils nur aus den Ursprüngen O_u ($u \in K$) der Tangentialräume $T_u M$ besteht. \square

Beispiel 4.2.2 Die in Beispiel 4.2.1 betrachtete Zeltabbildung φ kann zu einer Abbildung $\tilde{\varphi}$ in $M = \mathbb{R}^2$ erweitert werden, so daß eine nichttriviale äquivariante Zerlegung des Tangentialbündels existiert. Wir betrachten dazu

$$\tilde{\varphi}(x, y) = \begin{cases} (3x, y) & \text{für } x < \frac{1}{2}, \\ (3 - 3x, y) & \text{für } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Die Menge $\tilde{K} = K \times [0, 1]$ (siehe Abb. 4.1) ist invariant unter der Abbildung $\tilde{\varphi}$, wobei K die φ -invariante Menge aus Beispiel 2.1.1 und Beispiel 4.2.1 ist.

Mit $\tilde{K}_1 := K_1 \times [0, 1]$ und $\tilde{K}_2 := K_2 \times [0, 1]$ erhalten wir das 2-1-Endomorphismus-System $(\tilde{\varphi}, \tilde{K}, \tilde{K}_1, \tilde{K}_2)$, für das die Eigenschaft (C1) erfüllt ist. Hier können wir das Tangentialbündel $T_K M = \{[u, v] \mid u \in \tilde{K}, v \in \mathbb{R}^2\}$ äquivariant in die zwei Teilbündel

$$\{[u, (a, 0)] \mid u \in \tilde{K}, a \in \mathbb{R}\} \oplus \{[u, (0, b)] \mid u \in \tilde{K}, b \in \mathbb{R}\}$$

zerlegen. \square

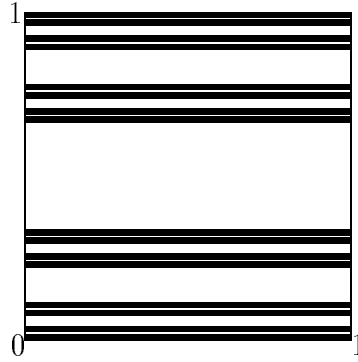


Abbildung 4.1: Struktur der invarianten Menge \tilde{K}

Beispiel 4.2.3 Eine bekannte Abbildungsklasse, die jeweils k verschiedene Punkte auf denselben Bildpunkt abbildet, sind Polynome vom Grad k in der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit \mathbb{C} . Wir wollen hier als spezielle Vertreter wie im Abschnitt 3.5.3 quadratische Polynome der Form

$$\varphi(z) = z^2 + c \quad (4.2.1)$$

betrachten, wobei $c \in \mathbb{C}$ ein Parameter ist. Wir betrachten als invariante Menge wieder die Julia-Menge K . Wir setzen im weiteren voraus, daß der Koordinatenursprung nicht in K enthalten ist. Da jeder Punkt aus K in diesem Fall genau zwei Urbilder in K hat, können wir K immer in zwei disjunkte Mengen K_1 und K_2 so zerlegen, daß $\varphi(K_1) = \varphi(K_2) = K$ gilt. Damit (φ, K, K_1, K_2) jedoch ein 2-1-Endomorphismus-System ist, müssen die Mengen K_1 und K_2 auch kompakt sein. Für $c = 0$ kann das zum Beispiel nicht erreicht werden, denn K ist in dem Falle die komplexe Einheitskreislinie und K_1 und K_2 sind jeweils halboffene Hälften dieser Kreislinie. Für hinreichend große c , nämlich $|c| > 2$, ist aber im Beweis des Satzes 14.5 aus [21] gezeigt worden, daß die Mengen K_1 und K_2 so gewählt werden können, daß sie in disjunkten abgeschlossenen Kreisscheiben liegen und damit kompakt sein müssen. Diese Kreisscheiben enthalten den Nullpunkt nicht. Somit ist unsere Voraussetzung, daß der Koordinatenursprung nicht in K enthalten ist, erfüllt. Also ist im Falle $|c| > 2$ die Abbildung (4.2.1) auf der Julia-Menge K ein 2-1-Endomorphismus.

Auch im vorliegenden Beispiel ist die Eigenschaft (C1) erfüllt, da auf jeder der Mengen K_1 und K_2 die Abbildung φ invertierbar ist und der Nullpunkt in keiner der beiden Mengen enthalten ist. Also ist die Ableitung von φ an jeder Stelle von K invertierbar.

Da die Ableitung von φ in jedem Punkt $u \in K$ jeweils zwei gleiche Singulärwerte besitzt (siehe Abschnitt 3.5.3), ist es hier sinnvoll, die triviale äquivalente Zerlegung des Tangentialbündels zu betrachten, bei der ein Teilbündel das gesamte Tangentialbündel $T_K M$ und die anderen Teilbündel jeweils nur aus den Ursprüngen O_u ($u \in K$) der Tangentialräume $T_u M$ bestehen. \square

Der Begriff der äquivarianten Zerlegung ist in Abschnitt 1.9 für C^1 -Abbildungen eingeführt worden und konnte deshalb für invariante Mengen von k -1-Endomorphismen einfach übernommen werden. Aber zur Definition der Singulärwertfunktion bezüglich der Zerlegung und der daraus resultierenden Definition der globalen Lyapunov-Exponenten in Abschnitt 1.9 mußte ein C^1 -Diffeomorphismus vorausgesetzt werden, da in diese Definitionen die inversen Tangentialabbildungen eingehen. Ein k -1-Endomorphismus ist im allgemeinen kein Diffeomorphismus, da er nicht injektiv sein kann (für $k \geq 2$). Unter der Voraussetzung (C1) lassen sich jedoch für k -1-Endomorphismen analoge Größen wie für Diffeomorphismen definieren.

Definition 4.2.2 *Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^1 -Mannigfaltigkeit und $(\varphi, K, K_1, \dots, K_k)$ ein k -1-Endomorphismus-System mit der Eigenschaft (C1) und der äquivarianten Zerlegung $T_K M = E^1 \oplus E^2 \oplus E^3$, in der jedes E^j ein n_j -dimensionales Bündel ist ($j = 1, 2, 3$, $n_1 + n_2 + n_3 = n$). Für jede Zahl $i = 1, \dots, k$ und beliebige Punkte $u, v \in K$ seien $\alpha_1^1(u), \dots, \alpha_{n_1}^1(u)$ die Singulärwerte von $d_u \varphi|_{E_u^1}$ und $\alpha_1^2(v, i), \dots, \alpha_{n_2}^2(v, i)$ die Singulärwerte von $d_v \varphi_i^{-1}|_{E_v^2}$. Die Menge $\{\alpha_1^1(u), \dots, \alpha_{n_1}^1(u), \alpha_1^2(v, i), \dots, \alpha_{n_2}^2(v, i)\}$ werde zu $\{\alpha_1(u, v, i), \dots, \alpha_{n_1+n_2}(u, v, i)\}$ mit $\alpha_1(u, v, i) \geq \dots \geq \alpha_{n_1+n_2}(u, v, i)$ umgeordnet. Für jede Zahl $d \in [0, n - n_3]$ ist die **Singulärwertfunktion der Ordnung d** von φ auf K bezüglich der Zerlegung $E^1 \oplus E^2 \oplus E^3$ durch*

$$\omega_{d,K}^{E^1, E^2, E^3}(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{für } d = 0, \\ \sup_{\substack{u, v \in K \\ i=1, \dots, k}} [\alpha_1(u, v, i) \cdot \dots \cdot \alpha_{[d]+1}(u, v, i)^{d-[d]}] & \text{für } d \in (0, n - n_3] \end{cases}$$

definiert.

Nun wollen wir Iterierte von k -1-Endomorphismen betrachten. Es wird zunächst gezeigt, daß die p -te Iterierte φ^p eines k -1-Endomorphismus φ für jedes $p \in \mathbb{N}$ ein k^p -1-Endomorphismus ist.

Bezeichnung Für jedes $p \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir die Teilmengen von K bezüglich φ^p und die entsprechenden Teilabbildungen mit

$$K_{i_1, \dots, i_p} := \varphi^{-(p-1)}(K_{i_1}) \cap \dots \cap \varphi^{-1}(K_{i_{p-1}}) \cap K_{i_p},$$

$$\varphi_{i_1, \dots, i_p} := \varphi^p|_{K_{i_1, \dots, i_p}}.$$

Lemma 4.2.1 *Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^1 -Mannigfaltigkeit und $(\varphi, K, K_1, \dots, K_k)$ ein k -1-Endomorphismus-System mit der Eigenschaft*

(C1). Dann ist für jedes $p \in \mathbb{N}$ das $(k^p + 2)$ -Tupel $(\varphi^p, K, \{K_{i_1, \dots, i_p}\}_{(i_1, \dots, i_p) \in \{1, \dots, k\}^p})$ ein k^p -1-Endomorphismus-System mit der Eigenschaft (C1).

Beweis Dieses Lemma kann durch vollständige Induktion bewiesen werden. Offensichtlich ist die Behauptung für $p = 1$ erfüllt. Wir nehmen nun an, daß für ein beliebiges $p \in \mathbb{N}$ das $(k^p + 2)$ -Tupel $(\varphi^p, K, \{K_{i_1, \dots, i_p}\}_{(i_1, \dots, i_p) \in \{1, \dots, k\}^p})$ ein k^p -1-Endomorphismus-System ist, und wollen die Behauptung für $p + 1$ zeigen. Dazu sei $(i_1, \dots, i_p, i_{p+1}) \in \{1, \dots, k\}^{p+1}$ ein beliebiges $(p + 1)$ -Tupel. Die Menge $\varphi^{-1}(K_{i_1, \dots, i_p})$ ist als Urbild der kompakten Menge K_{i_1, \dots, i_p} unter der stetigen Abbildung φ mit kompaktem Definitionsbereich K auch kompakt. Weiterhin gilt

$$\varphi^{-1}(K_{i_1, \dots, i_p}) = \varphi^{-1}(\varphi^{-p+1}(K_{i_1}) \cap \dots \cap K_{i_p}) = \varphi^{-p}(K_{i_1}) \cap \dots \cap \varphi^{-1}(K_{i_p}).$$

Damit ist die Menge $K_{i_1, \dots, i_{p+1}}$ als Durchschnitt der kompakten Mengen $K_{i_{p+1}}$ und $\varphi^{-1}(K_{i_1, \dots, i_p})$ kompakt. Offensichtlich sind zwei Mengen $K_{i_1, \dots, i_{p+1}}$ und $K_{j_1, \dots, j_{p+1}}$ mit $(i_1, \dots, i_{p+1}) \neq (j_1, \dots, j_{p+1})$ disjunkt. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \bigcup_{(i_1, \dots, i_{p+1}) \in \{1, \dots, k\}^{p+1}} K_{i_1, \dots, i_{p+1}} &= \bigcup_{(i_1, \dots, i_{p+1}) \in \{1, \dots, k\}^{p+1}} (\varphi^{-1}(K_{i_1, \dots, i_p}) \cap K_{i_{p+1}}) \\ &= \bigcup_{(i_1, \dots, i_p) \in \{1, \dots, k\}^p} \bigcup_{i_{p+1}=1}^k (\varphi^{-1}(K_{i_1, \dots, i_p}) \cap K_{i_{p+1}}) \\ &= \bigcup_{(i_1, \dots, i_p) \in \{1, \dots, k\}^p} \varphi^{-1}(K_{i_1, \dots, i_p}) \\ &= \varphi^{-1} \left(\bigcup_{(i_1, \dots, i_p) \in \{1, \dots, k\}^p} K_{i_1, \dots, i_p} \right) \\ &= \varphi^{-1}(K) = K. \end{aligned}$$

Aus der Beziehung

$$\begin{aligned} \varphi(K_{i_1, \dots, i_{p+1}}) &= \varphi(\varphi^{-1}(K_{i_1, \dots, i_p}) \cap K_{i_{p+1}}) = K_{i_1, \dots, i_p} \cap \varphi(K_{i_{p+1}}) \\ &= K_{i_1, \dots, i_p} \cap K = K_{i_1, \dots, i_p} \end{aligned}$$

und der Annahme $\varphi^p(K_{i_1, \dots, i_p}) = K$ folgt die Gleichheit $\varphi^{p+1}(K_{i_1, \dots, i_{p+1}}) = K$. Damit ist gezeigt, daß $(\varphi^{p+1}, K, \{K_{i_1, \dots, i_{p+1}}\}_{(i_1, \dots, i_{p+1}) \in \{1, \dots, k\}^{p+1}})$ ein k^{p+1} -1-Endomorphismus-System ist.

Nun ist noch die Eigenschaft (C1) für die Abbildung φ^{p+1} nachzuweisen. Für jede Teilabbildung gilt

$$\varphi_{i_1, \dots, i_{p+1}} = \varphi_{i_1, \dots, i_p} \circ \varphi_{i_{p+1}}$$

auf der Menge $K_{i_1, \dots, i_{p+1}}$. Wegen (C1) für die Abbildung φ kann $\varphi_{i_{p+1}}$ zu einem C^1 -Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung $U_{i_{p+1}}$ von $K_{i_{p+1}}$ fortgesetzt werden. Dasselbe gilt für $\varphi_{i_1, \dots, i_p}$ und eine Umgebung U_{i_1, \dots, i_p} von K_{i_1, \dots, i_p} . Damit ist die Menge $U_{i_1, \dots, i_{p+1}} = U_{i_{p+1}} \cap \varphi_{i_{p+1}}^{-1}(U_{i_1, \dots, i_p})$ eine Umgebung von $K_{i_1, \dots, i_{p+1}}$, auf die die Abbildung $\varphi_{i_1, \dots, i_p, i_{p+1}}$ als C^1 -Diffeomorphismus fortgesetzt werden kann.

Damit ist die Behauptung für $p + 1$ gezeigt und, nach dem Prinzip der vollständigen Induktion, Lemma 4.2.1 für alle $p \in \mathbb{N}$ bewiesen. \blacksquare

Aufgrund von Lemma 4.2.1 ist die in Definition 4.2.2 eingeführte Singulärwertfunktion auch auf Iterierte von k -1-Endomorphismen anwendbar. Für die Singulärwertfunktion der Iterierten eines k -1-Endomorphismus gilt, analog zu Lemma 1.9.1, die folgende Aussage.

Lemma 4.2.2 *Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^1 -Mannigfaltigkeit und $(\varphi, K, K_1, \dots, K_k)$ ein k -1-Endomorphismus-System mit der Eigenschaft (C1), für das eine äquivariante Zerlegung $T_K M = E^1 \oplus E^2 \oplus E^3$ existiert, in der jedes E^j ein n_j -dimensionales Bündel ist ($j = 1, 2, 3$, $n_1 + n_2 + n_3 = n$). Dann gilt für alle $d \in [0, n - n_3]$ und alle $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$ die Beziehung*

$$\omega_{d,K}^{E^1, E^2, E^3}(\varphi^{t_1+t_2}) \leq \omega_{d,K}^{E^1, E^2, E^3}(\varphi^{t_1}) \cdot \omega_{d,K}^{E^1, E^2, E^3}(\varphi^{t_2}).$$

Aufgrund von Lemma 4.2.2 existiert, analog zu (1.9.2), der Grenzwert

$$\nu_d := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \omega_{d,K}^{E^1, E^2, E^3}(\varphi^t) \quad (4.2.2)$$

für jedes $d \in [0, n - n_3]$, und es kann wieder, analog zu Abschnitt 1.9, gezeigt werden, daß dieser Grenzwert immer reell ist. Damit sind für k -1-Endomorphismen globale Lyapunov-Exponenten wie in Abschnitt 1.9 erklärt:

Definition 4.2.3 *Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^1 -Mannigfaltigkeit und $(\varphi, K, K_1, \dots, K_k)$ ein k -1-Endomorphismus-System mit der Eigenschaft (C1), für das eine äquivariante Zerlegung $T_K M = E^1 \oplus E^2 \oplus E^3$ existiert, wobei E^j ein n_j -dimensionales Bündel ist ($j = 1, 2, 3$, $n_1 + n_2 + n_3 = n$). Die Zahlen $\nu_i - \nu_{i-1}$ ($i = 1, \dots, n - n_3$) seien der Größe nach als $\nu_1^u \geq \nu_2^u \geq \dots \geq \nu_{n-n_3}^u$ angeordnet. Die Zahlen ν_i^u ($i = 1, \dots, n - n_3$) heißen **globale Lyapunov-Exponenten** von $(\varphi, K, K_1, \dots, K_k)$ bezüglich der Zerlegung $E^1 \oplus E^2 \oplus E^3$.*

Die Dimensionsabschätzungen des Abschnitts 4.1 nutzen Überdeckungen der invarianten Menge mit Bowen-Kugeln. Diese sind aber nur für invertierbare Abbildungen definiert (siehe Abschnitt 1.8). Deshalb müssen wir für k -1-Endomorphismen spezielle Bowen-Kugeln einführen:

Definition 4.2.4 Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^1 -Mannigfaltigkeit, ϱ die durch g erzeugte Metrik, $(\varphi, K, K_1, \dots, K_k)$ ein k -1-Endomorphismus-System mit der Eigenschaft (C1) und $p \in \mathbb{N}$ eine Zahl. Dann ist für jedes p -Tupel $(i_1, \dots, i_p) \in \{1, \dots, k\}^p$ und jeden Punkt $u \in K$ die **Bowen-Kugel der Ordnung (i_1, \dots, i_p)** vom Radius $r > 0$ um u durch

$$B^{i_1, \dots, i_p}(u, r) = \{v \in M \mid \varrho(\varphi^j(u), \varphi^j(v)) < r \ (j = 0, \dots, p), \\ \varrho(\varphi_{i_1, \dots, i_j}^{-1}(u), \varphi_{i_1, \dots, i_j}^{-1}(v)) < r \ (j = 1, \dots, p)\}$$

definiert. Dabei werden nur Punkte aus M betrachtet, für die die Abbildungen φ^j und $\varphi_{i_1, \dots, i_j}^{-1}$ erklärt sind.

Bezeichnung Für ein k -1-Endomorphismus-System $(\varphi, K, K_1, \dots, K_k)$ mit der Eigenschaft (C1), ein p -Tupel $(i_1, \dots, i_p) \in \{1, \dots, k\}^p$ und eine Zahl $\varepsilon > 0$ bezeichne

$$N_{i_1, \dots, i_p}(K, \varepsilon)$$

die kleinste Anzahl von Bowen-Kugeln der Ordnung (i_1, \dots, i_p) mit Radius $\varepsilon > 0$ um Punkte aus K , die zur Überdeckung von K notwendig sind.

Die Zahlen $N_{i_1, \dots, i_p}(K, \varepsilon)$ ($(i_1, \dots, i_p) \in \{1, \dots, k\}^p$) haben folgende Eigenschaft:

Lemma 4.2.3 Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^1 -Mannigfaltigkeit, $(\varphi, K, K_1, \dots, K_k)$ ein k -1-Endomorphismus-System mit der Eigenschaft (C1) und $p \in \mathbb{N}$ eine Zahl. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$ die Gleichung

$$\sum_{(i_1, \dots, i_p) \in \{1, \dots, k\}^p} N_{i_1, \dots, i_p}(K, \varepsilon) = N_{2p+1}(K, \varepsilon).$$

Beweis Für ein festes $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ wählen wir zu jedem $(i_1, \dots, i_p) \in \{1, \dots, k\}^p$ eine Überdeckung $\{B^{i_1, \dots, i_p}(u_{i_1, \dots, i_p}, \varepsilon)\}$ von K kleinster Mächtigkeit $N_{i_1, \dots, i_p}(K, \varepsilon)$ mit Bowen-Kugeln der Ordnung (i_1, \dots, i_p) vom Radius ε um Punkte $u_{i_1, \dots, i_p} \in K$. Da die Punkte $\varphi_{i_1, \dots, i_p}^{-1}(u_{i_1, \dots, i_p})$ eine $(2p+1, \varepsilon)$ -aufspannende Menge für K bilden, gilt

$$\sum_{(i_1, \dots, i_p) \in \{1, \dots, k\}^p} N_{i_1, \dots, i_p}(K, \varepsilon) \geq N_{2p+1}(K, \varepsilon).$$

Andererseits können wir für ein festes $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ von einer $(2p+1, \varepsilon)$ -aufspannenden Menge G für K kleinster Mächtigkeit $N_{2p+1}(K, \varepsilon)$ ausgehen. Es sei $G_{i_1, \dots, i_p} := G \cap K_{i_1, \dots, i_p}$. Dann ist für jedes p -Tupel $(i_1, \dots, i_p) \in \{1, \dots, k\}^p$ die Menge $\varphi^p(G_{i_1, \dots, i_p})$

eine $(p+1, \varepsilon)$ -aufspannende Menge für K und für $j = 0, \dots, p-1$ die Menge $\varphi^j(G_{i_1, \dots, i_p})$ eine $(2p-j, \varepsilon)$ -aufspannende Menge für $K_{i_1, \dots, i_{p-j}}$, wobei für Punkte $u \in G_{i_1, \dots, i_p}$ die Beziehung $\varphi^j(u) = \varphi_{i_1, \dots, i_{p-j}}^{-1}(\varphi^p(u))$ gilt. Also ist $B^{i_1, \dots, i_p}(\varphi^j(G_{i_1, \dots, i_p}), \varepsilon)$ eine Überdeckung von K mit Bowen-Kugeln der Ordnung (i_1, \dots, i_p) . Somit gilt

$$\sum_{(i_1, \dots, i_p) \in \{1, \dots, k\}^p} N_{i_1, \dots, i_p}(K, \varepsilon) \leq N_{2p+1}(K, \varepsilon).$$

Aus diesen beiden Ungleichungen folgt die Behauptung. ■

Für k -1-Endomorphismen mit der Eigenschaft (C1) kann, wie das folgende Lemma zeigt, die topologische Entropie nach unten abgeschätzt werden.

Lemma 4.2.4 *Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^1 -Mannigfaltigkeit und $(\varphi, K, K_1, \dots, K_k)$ ein k -1-Endomorphismus-System mit der Eigenschaft (C1). Dann gilt*

$$h_{\text{top}}(\varphi|_K) \geq \ln k.$$

Beweis Es seien $p > 1$ eine natürliche Zahl, $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl, die kleiner als die Hälfte des minimalen Abstands zwischen zwei Mengen K_i und K_j ($1 \leq i < j \leq k$) ist, und G eine (p, ε) -aufspannende Menge für K in bezug auf φ mit minimaler Mächtigkeit $N_p(K, \varepsilon)$. Dann ist das Mengensystem $\{\{v \in M \mid \varrho(\varphi^j(u), \varphi^j(v)) \leq \varepsilon, j = 0, \dots, p-1\}\}_{u \in G}$ eine Überdeckung von K . Es sei nun der Kürze halber $G_i := G \cap K_i$ ($i = 1, \dots, k$). Da $\varphi(K_i) = K$ gilt und ε hinreichend klein gewählt wurde, ist jedes Mengensystem $\{\{v \in M \mid \varrho(\varphi^j(u), \varphi^j(v)) \leq \varepsilon, j = 0, \dots, p-2\}\}_{u \in \varphi(G_i)}$ eine Überdeckung von K . Damit ist $\varphi(G_i)$ jeweils eine $(p-1, \varepsilon)$ -aufspannende Menge für K bezüglich φ . Also gilt

$$N_\varepsilon(K, p) \geq k N_\varepsilon(K, p-1)$$

und damit

$$\begin{aligned} h_{\text{top}}(\varphi|_K) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \limsup_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \ln N_p(K, \varepsilon) \\ &\geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \limsup_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \ln(k^{p-1} N_1(K, \varepsilon)) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \limsup_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{p-1}{p} \ln k + \frac{1}{p} \ln N_1(K, \varepsilon) \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \ln k \\ &= \ln k. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

4.3 Obere Dimensionsschranken für k -1-Endomorphismen

Mit Hilfe der in Abschnitt 4.2 eingeführten Begriffe der Singulärwertfunktion und der globalen Lyapunov-Exponenten bezüglich einer äquivarianten Zerlegung des Tangentialbündels lassen sich für k -1-Endomorphismen ähnliche obere Schranken für die Hausdorff-Dimension der invarianten Menge wie in Abschnitt 4.1 angeben. Im Unterschied zu Abschnitt 4.1 geht hier zusätzlich die Zahl k mit in die Dimensionsschranke ein.

Satz 4.3.1 *Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^3 -Mannigfaltigkeit und $(\varphi, K, K_1, \dots, K_k)$ ein k -1-Endomorphismus-System mit der Eigenschaft (C1), für das eine äquivariante Zerlegung $T_K M = E^1 \oplus E^2 \oplus E^3$ existiert, in der jedes E^j ein n_j -dimensionales Bündel ist ($j = 1, 2, 3$, $n_1 + n_2 + n_3 = n$). Falls es eine Zahl $d \in (0, n - n_3]$ mit*

$$\omega_{d,K}^{E^1, E^2, E^3}(\varphi) < k e^{-2h_{\text{top}}(\varphi|_K)} \quad (4.3.1)$$

gibt, gilt $\dim_H(K) \leq d + n_3$.

Beweis Es bezeichne $\lambda := h_{\text{top}}(\varphi|_K)$ wieder die topologische Entropie von φ auf K . Da für $\tilde{l} := \omega_{d,K}^{E^1, E^2, E^3}(\varphi)$ die Ungleichungen $0 < \tilde{l} < k e^{-2\lambda}$ gelten, gibt es eine Zahl l mit $\tilde{l} < l < k e^{-2\lambda}$. Nach Lemma 4.2.2 gilt dann $\omega_{d,K}^{E^1, E^2, E^3}(\varphi^p) \leq \tilde{l}^p < l^p$ für alle $p \in \mathbb{N}$.

Nun sei $p \in \mathbb{N}$ eine beliebige, aber festgehaltene Zahl. Da φ^p nach Lemma 4.2.1 einen k^p -1-Endomorphismus mit der Eigenschaft (C1) darstellt, ist φ^p auf einer offenen Umgebung $U = \bigcup_{(i_1, \dots, i_p) \in \{1, \dots, k\}^p} U_{i_1, \dots, i_p}$ von K als C^1 -Abbildung definiert, so daß die Mengen U_{i_1, \dots, i_p} paarweise disjunkt sind. Nun werden die Zahlen m, η, r_1, r_2, r_3 und r_0 und die Menge V wie im Beweis von Satz 4.1.1 so gewählt, daß (4.1.2), (4.1.3), (4.1.4) und (4.1.5) für die Abbildung φ^p anstelle von φ^{pt} erfüllt sind. Aufgrund der speziellen Struktur von U ist jede Kugel vom Radius r_2 , die Punkte aus K enthält, vollständig in einer der Mengen U_{i_1, \dots, i_p} ($(i_1, \dots, i_p) \in \{1, \dots, k\}^p$) enthalten.

Wir betrachten ein festes $\varepsilon \in (0, r_0)$ und zunächst ein festgewähltes p -Tupel $(i_1, \dots, i_p) \in \{1, \dots, k\}^p$. Es sei $\{B^{i_1, \dots, i_p}(u_i, r_i)\}_{i \in I}$ eine endliche Überdeckung von K kleinster Mächtigkeit $|I| = N_{i_1, \dots, i_p}(K, \varepsilon)$ mit Bowen-Kugeln der Ordnung (i_1, \dots, i_p) um Punkte $u_i \in K$ und mit Radien $r_i \leq \varepsilon$. Es sei $i \in I$ zunächst festgehalten. Aufgrund der Definition 4.2.4 gilt

$$\exp_{u_i}^{-1}(B^{i_1, \dots, i_p}(u_i, r_i)) \subset \exp_{u_i}^{-1}(B(u_i, r_i)).$$

Wegen $r_i \leq r_2$ ist somit die Bowen-Kugel $B^{i_1, \dots, i_p}(u_i, r_i)$ vollständig in $V \cap U_{i_1, \dots, i_p}$ enthalten. Außerdem gilt $B^{i_1, \dots, i_p}(u_i, r_i) \subset \varphi^p(B(\varphi^{-p}(u_i), r_i))$, und die Anwendung

der Taylor-Formel für die differenzierbare Abbildung φ^p liefert die Ungleichung

$$\begin{aligned} & \|\exp_{u_i}^{-1} \varphi^p(v) - d_{\varphi_{i_1, \dots, i_p}^{-1}(u_i)} \varphi^p(\exp_{\varphi_{i_1, \dots, i_p}^{-1}(u_i)}^{-1}(v))\| \\ & \leq \sup_{w \in B(\varphi_{i_1, \dots, i_p}^{-1}(u_i), r_i)} \|\tau_{\varphi^p(w)}^{\varphi^p(u_i)} d_w \varphi^p \tau_{u_i}^w - d_{u_i} \varphi^p\| \cdot \|\exp_{\varphi_{i_1, \dots, i_p}^{-1}(u_i)}^{-1}(w)\|. \end{aligned}$$

für alle $v \in B(\varphi_{i_1, \dots, i_p}^{-1}(u_i), r_i)$. Zusammen mit (4.1.4) ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \exp_{u_i}^{-1}(B^{i_1, \dots, i_p}(u_i, r_i)) & \subset \exp_{u_i}^{-1}(\varphi^p(B(\varphi_{i_1, \dots, i_p}^{-1}(u_i), r_i))) \\ & \subset d_{\varphi_{i_1, \dots, i_p}^{-1}(u_i)} \varphi^p(B(O_{\varphi_{i_1, \dots, i_p}^{-1}(u_i)}, r_i)) + B(O_{u_i}, \eta r_i). \end{aligned}$$

In analoger Weise erhält man

$$\exp_{u_i}^{-1}(B^{i_1, \dots, i_p}(u_i, r_i)) \subset d_{\varphi^p(u_i)} \varphi_{i_1, \dots, i_p}^{-1}(B(O_{\varphi^p(u_i)}, r_i)) + B(O_{u_i}, \eta r_i).$$

Also erhalten wir insgesamt die Inklusion

$$\begin{aligned} & \exp_{u_i}^{-1}(B^{i_1, \dots, i_p}(u_i, r_i)) \\ & \subset (d_{\varphi_{i_1, \dots, i_p}^{-1}(u_i)} \varphi^p(B(O_{\varphi_{i_1, \dots, i_p}^{-1}(u_i)}, r_i)) \cap d_{\varphi^p(u_i)} \varphi_{i_1, \dots, i_p}^{-1}(B(O_{\varphi^p(u_i)}, r_i))) \\ & \quad \cap \exp_{u_i}^{-1}(B(u_i, r_i))) + B(O_{u_i}, \eta r_i) \\ & \subset (\mathcal{E}_i^1 \oplus \mathcal{E}_i^2 \oplus \mathcal{E}_i^3) + B(O_{u_i}, \eta r_i), \end{aligned}$$

wobei, analog zum Beweis von Satz 4.1.1, $\mathcal{E}_i^1 \subset E_{u_i}^1$, $\mathcal{E}_i^2 \subset E_{u_i}^2$ und $\mathcal{E}_i^3 \subset E_{u_i}^3$ die Ellipsoide $\pi_1(d_{\varphi_{i_1, \dots, i_p}^{-1}(u_i)} \varphi^p(B(O_{\varphi_{i_1, \dots, i_p}^{-1}(u_i)}, r_i)))$, $\pi_2(d_{\varphi^p(u_i)} \varphi_{i_1, \dots, i_p}^{-1}(B(O_{\varphi^p(u_i)}, r_i)))$ und $\pi_3(\exp_{u_i}^{-1}(B(u_i, r_i)))$ und π_j die Projektion von $T_K M$ auf E^j bezeichnen ($j = 1, 2, 3$). Aufgrund von $\omega_{d, K}^{E^1, E^2, E^3}(\varphi^p) \leq \tilde{l}^p$ gilt $\omega_d^{E_{u_i}^1, E_{u_i}^2}(\mathcal{E}_i^1 \oplus \mathcal{E}_i^2) \leq \tilde{l}^p r_i^d$, und wegen $\tilde{l} < 1$ folgt daraus

$$\omega_{d+n_3}^{E_{u_i}^1, E_{u_i}^2, E_{u_i}^3}(\mathcal{E}_i^1 \oplus \mathcal{E}_i^2 \oplus \mathcal{E}_i^3) \leq \tilde{l}^p r_i^{d+n_3}.$$

Aus (4.1.2) ergibt sich, daß die Längen der Halbachsen von \mathcal{E}_i^1 , \mathcal{E}_i^2 und \mathcal{E}_i^3 höchstens ηr_i betragen. Aufgrund von Lemma 1.9.2 und (4.1.3) existieren Ellipsoide $\mathcal{E}_i^{1'} \subset E_{u_i}^1$, $\mathcal{E}_i^{2'} \subset E_{u_i}^2$ und $\mathcal{E}_i^{3'} \subset E_{u_i}^3$ mit den Eigenschaften

$$\exp_{u_i}^{-1}(B^p(u_i, r_i)) \subset \mathcal{E}_i^{1'} \oplus \mathcal{E}_i^{2'} \oplus \mathcal{E}_i^{3'}$$

und (4.1.6). Betrachten wir diese Inklusion für alle $i \in I$, so kann die Menge K durch $N_{i_1, \dots, i_p}(K, \varepsilon)$ Mengen der Form $\exp_{u_i}(\mathcal{E}_i^{1'} \oplus \mathcal{E}_i^{2'} \oplus \mathcal{E}_i^{3'})$ mit $\omega_d^{E_{u_i}^1, E_{u_i}^2, E_{u_i}^3}(\mathcal{E}_i^{1'} \oplus \mathcal{E}_i^{2'} \oplus \mathcal{E}_i^{3'}) \leq$

$l^p r_i^{d+n_3}$ überdeckt werden. Für einen festen Index $i \in I$ gilt dabei, analog zum Beweis von Satz 4.1.1,

$$\mu_H(B^{i_1, \dots, i_p}(u_i, r_i), d + n_3, 6\varepsilon\sqrt{[d] + 1}) \leq 6^{d+n_3} 2^{[d]+n_3} ([d] + 1)^{\frac{d+n_3}{2}} l^p \varepsilon^{d+n_3}$$

und damit

$$\mu_H(K, d + n_3, 6\varepsilon\sqrt{[d] + 1}) \leq N_{i_1, \dots, i_p}(K, \varepsilon) 6^{d+n_3} 2^{[d]+n_3} ([d] + 1)^{\frac{d+n_3}{2}} l^p \varepsilon^{d+n_3}.$$

Da diese Ungleichung für jedes p -Tupel $(i_1, \dots, i_p) \in \{1, \dots, k\}^p$ gilt, folgt mit Lemma 4.2.3

$$k^p \mu_H(K, d + n_3, 6\varepsilon\sqrt{[d] + 1}) \leq N_{2p+1}(K, \varepsilon) 6^{d+n_3} 2^{[d]+n_3} ([d] + 1)^{\frac{d+n_3}{2}} l^p \varepsilon^{d+n_3}.$$

Aufgrund der Definition der topologischen Entropie von φ auf K gibt es zu beliebigem $\alpha > 0$ Zahlen $\varepsilon_0(\alpha) > 0$ und $p_0(\alpha, \varepsilon) \in \mathbb{N}$, so daß

$$N_{2p+1}(K, \varepsilon) < e^{p(2\lambda+\alpha)}$$

für $0 < \varepsilon < \varepsilon_0(\alpha)$ und $p > p_0(\alpha, \varepsilon)$ gilt. Also ist

$$\mu_H(K, d + n_3, 6\varepsilon\sqrt{[d] + 1}) < k^{-p} e^{p(2\lambda+\alpha)} 6^{d+n_3} 2^{[d]+n_3} ([d] + 1)^{\frac{d+n_3}{2}} l^p \varepsilon^{d+n_3}.$$

Wegen $l < ke^{-2\lambda}$ ist $2\lambda - \ln k + \ln l < 0$. Also können wir ein $\alpha > 0$ so klein wählen, daß auch $2\lambda - \ln k + \ln l + \alpha < 0$ gilt. Dann ist für $0 < \varepsilon < \min\{r_0, \varepsilon_0(\alpha)\}$ und $p > p_0(\alpha, \varepsilon)$ die Ungleichung

$$\mu_H(K, d + n_3, 6\varepsilon\sqrt{[d] + 1}) < e^{p(2\lambda - \ln k + \ln l + \alpha)} 6^{d+n_3} 2^{[d]+n_3} ([d] + 1)^{\frac{d+n_3}{2}} \varepsilon^{d+n_3}$$

erfüllt. Betrachten wir den Grenzübergang $p \rightarrow \infty$, so ergibt sich aus der letzten Ungleichung $\mu_H(K, d+n_3, 6\varepsilon\sqrt{[d] + 1}) = 0$ und damit $\mu_H(K, d+n_3) = 0$. Das bedeutet $\dim_H(K) \leq d + n_3$. ■

Betrachtet man das Langzeitverhalten des durch die Abbildung φ definierten dynamischen Systems, so läßt sich auch Satz 4.3.1 in der Sprache der globalen Lyapunov-Exponenten formulieren:

Folgerung 4.3.1 *Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^3 -Mannigfaltigkeit und $(\varphi, K, K_1, \dots, K_k)$ ein k -1-Endomorphismus-System mit der Eigenschaft (C1), für das eine äquivalente Zerlegung $T_K M = E^1 \oplus E^2 \oplus E^3$ existiert, wobei jedes E^j ein n_j -dimensionales Bündel ist ($j = 1, 2, 3$, $n_1 + n_2 + n_3 = n$). Es seien $\nu_1^u, \dots, \nu_{n-n_3}^u$ die globalen Lyapunov-Exponenten von φ auf K bezüglich der Zerlegung $E^1 \oplus E^2 \oplus E^3$, und $D \in \{0, \dots, n - n_3 - 1\}$ sei die kleinste Zahl mit der Eigenschaft*

$$2h_{\text{top}}(\varphi|_K) - \ln k + \nu_1^u + \dots + \nu_D^u + \nu_{D+1}^u < 0. \quad (4.3.2)$$

Dann gilt $\dim_H(K) \leq D + n_3 + \frac{2h_{\text{top}}(\varphi|_K) - \ln k + \nu_1^u + \dots + \nu_D^u}{|\nu_{D+1}^u|}$.

Beweis Wie in Abschnitt 4.2 bemerkt wurde, sind für einen k -1-Endomorphismus mit der Eigenschaft (C1) alle globalen Lyapunov-Exponenten reelle Zahlen. Es bezeichne wiederum $\lambda := h_{\text{top}}(\varphi|_K)$. Wegen $\lambda \geq 0$ und Lemma 4.2.4 folgt aus Bedingung (4.3.2) $\nu_{D+1}^u < 0$ und damit $\nu_m^u < 0$ für alle $m = D+1, \dots, n-n_3$. Nun sei $d \in \left(D + \frac{2\lambda + \nu_1^u + \dots + \nu_D^u}{|\nu_{D+1}^u|}, n-n_3\right]$ eine beliebige Zahl. Dann gilt

$$2\lambda - \ln k + \nu_d \leq 2\lambda - \ln k + \nu_1^u + \dots + \nu_{[d]}^u + (d - [d])\nu_{[d]+1}^u < 0.$$

Wir wählen eine Zahl $\varepsilon > 0$ so klein, daß $\nu_d + \varepsilon < -2\lambda + \ln k$ gilt. Wegen (4.2.2) gibt es eine natürliche Zahl t mit $\frac{1}{t} \ln \omega_{d,K}^{E^1, E^2, E^3}(\varphi^t) < \nu_d + \varepsilon$. Für dieses t gilt

$$\omega_{d,K}^{E^1, E^2, E^3}(\varphi^t) < e^{t(\nu_d + \varepsilon)} < k^t e^{-2t\lambda}.$$

Aufgrund von Lemma 1.8.1 und Lemma 4.2.1 sind damit die Bedingungen von Satz 4.3.1 für die Abbildung φ^t erfüllt. Somit erhalten wir $\dim_H(K) \leq d + n_3$ für jedes $d \in \left(D + \frac{2\lambda + \nu_1^u + \dots + \nu_D^u}{|\nu_{D+1}^u|}, n-n_3\right]$. Im Grenzübergang $d \rightarrow D + \frac{2\lambda + \nu_1^u + \dots + \nu_D^u}{|\nu_{D+1}^u|}$ folgt die Behauptung. ■

4.4 Anwendungsbeispiele

4.4.1 Hufeisenabbildungen

Als Beispiel eines diskreten invertierbaren dynamischen Systems betrachten wir erneut die in Abschnitt 3.5.5 eingeführten Hufeisenabbildungen $f : I^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ mit den Eigenschaften (H2) und (H3). Punkte aus I^{m+1} werden wieder in der Form (x, y) mit $x \in I$ und $y \in I^m$ geschrieben. Da Hufeisenabbildungen als injektiv vorausgesetzt wurden, folgt aus den Eigenschaften (H1) - (H3), daß sie auf eine offene Umgebung der maximalen invarianten Menge K als C^1 -Diffeomorphismus fortgesetzt werden können. Für Hufeisenabbildungen liegt natürlicherweise eine äquivariante Zerlegung des Tangentialbündels $T_K M$ vor, nämlich in das Bündel E^1 tangential an die Komponente $y \in I^m$ und in das Bündel E^2 tangential an die Komponente $x \in I^*$. Das Bündel E^3 sei das triviale Bündel, das nur aus den Ursprüngen O_u der Tangentialräume $T_u M$ ($u \in K$) besteht. Damit ist $n_3 = 0$. Die Singulärwerte bezüglich dieser Zerlegung betragen $\frac{1}{\inf_{(x,y) \in K} |d_x \varphi|}$ und m -mal λ .

Da die Dimensionsabschätzung aus Abschnitt 4.1 durch Fallunterscheidungen bezüglich der Größenverhältnisse von $\inf_{(x,y) \in K} |d_x \varphi|$, λ und $h_{\text{top}}(f|_K)$ für allgemeine Hufeisenabbildungen sehr unübersichtlich würden, soll hier nur ein spezieller Vertreter betrachtet werden, der in Abb. 4.2 dargestellt ist.

Dabei wird, ähnlich wie in der in Abb. 3.4 dargestellten Abbildung, das Einheitsquadrat vertikal mit dem Faktor 3 gestreckt, horizontal mit dem Faktor $\frac{2}{5}$ gestaucht

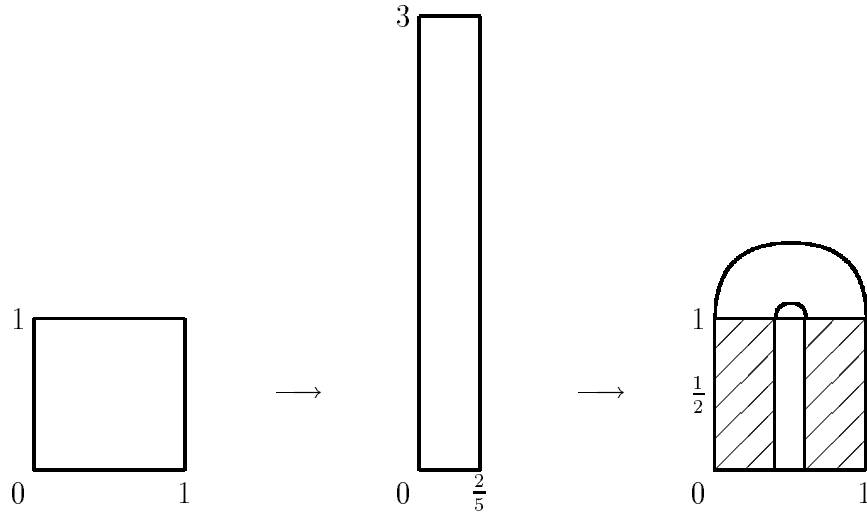


Abbildung 4.2: Beispiel einer Hufeisenabbildung

und anschließend zu einem Hufeisen gebogen. Die Menge I^* besteht dann aus den Intervallen $I_1 = [0, \frac{1}{3}]$ und $I_2 = [\frac{2}{3}, 1]$, und in den Punkten $(x, y) \in I^* \times I$ läßt sich die Abbildung als

$$f(x, y) = \begin{cases} (3x, \frac{2}{5}y) & \text{für } (x, y) \in I_1 \times I, \\ (3 - 3x, 1 - \frac{2}{5}y) & \text{für } (x, y) \in I_2 \times I \end{cases}$$

darstellen. Damit gilt hier $\lambda = \frac{2}{5}$, und die Abbildungen φ , ψ und A haben die Form

$$\varphi(x) = \begin{cases} 3x & \text{für } x \in I_1, \\ 3 - 3x & \text{für } x \in I_2, \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in I_1, \\ 1 & \text{für } x \in I_2, \end{cases} \quad \text{und}$$

$$A(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in I_1, \\ -1 & \text{für } x \in I_2. \end{cases}$$

Diese Hufeisenabbildung erfüllt die Eigenschaften (H2) und (H3), und die Funktion

$\tilde{\psi} : [0, \frac{2}{5}] \cup [\frac{3}{5}, 1] \rightarrow [0, 1]$ ergibt sich als

$$\tilde{\psi}(y) = \begin{cases} \frac{5}{2}y & \text{für } y \in [0, \frac{2}{5}], \\ \frac{5}{2} - \frac{5}{2}y & \text{für } y \in [\frac{3}{5}, 1]. \end{cases}$$

Die maximale invariante Menge $K = \bigcap_{p=-\infty}^{\infty} f^p(I^* \times I)$ dieser Hufeisenabbildung ist in Abb. 4.3 dargestellt. Sie stimmt hier sogar mit dem Kreuzprodukt $\tilde{K}_{\varphi} \times \tilde{K}_{\tilde{\psi}}$ überein, wobei \tilde{K}_{φ} und $\tilde{K}_{\tilde{\psi}}$ wie in Abschnitt 3.5.5 definiert sind.

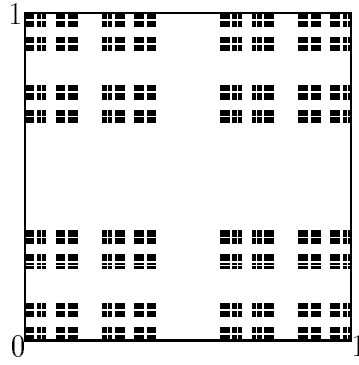


Abbildung 4.3: Invariante Menge K der Hufeisenabbildung

Die topologische Entropie der Hufeisenabbildung auf K beträgt $\ln 2$, da diese Abbildung topologisch konjugiert zur Shiftabbildung im Raum der zweiseitig unendlichen Folgen mit zwei Symbolen ist. Der Ausdruck $e^{-2h_{\text{top}}(\varphi|_K)}$ in der Bedingung (4.1.1) hat damit den Wert $\frac{1}{4}$. Demzufolge kann Bedingung (4.1.1) für Zahlen $d \leq 1$ nicht erfüllt werden. Für $d \in (1, 2]$ hat sie die Form

$$\frac{2}{5} \left(\frac{1}{3} \right)^{d-1} < \frac{1}{4},$$

was gleichbedeutend mit $d > 1 + \frac{\ln 8 - \ln 5}{\ln 3}$ ist. Für alle diese Zahlen d liefert Satz 4.1.1 $\dim_H(K) \leq d$. Im Grenzübergang $d \rightarrow 1 + \frac{\ln 8 - \ln 5}{\ln 3}$ ergibt sich daraus

$$\dim_H(K) \leq 1 + \frac{\ln 8 - \ln 5}{\ln 3} \approx 1,428. \quad (4.4.1)$$

Das gleiche Ergebnis wird mit Folgerung 4.1.1 erreicht, da hier die globalen Lyapunov-Exponenten mit den Logarithmen der Singulärwerte übereinstimmen.

In Abschnitt 3.5.5 ist gezeigt worden, daß es für Hufeisenabbildungen auch sinnvoll sein kann, Methoden für nicht injektive Abbildungen anzuwenden. Dazu betrachten

wir hier die Darstellung der invarianten Menge als Kreuzprodukt $\tilde{K}_\varphi \times \tilde{K}_{\tilde{\psi}}$, wobei die Menge \tilde{K}_φ bzw. $\tilde{K}_{\tilde{\psi}}$ invariant unter der Abbildung φ bzw. $\tilde{\psi}$ ist. Wie ebenfalls in Abschnitt 3.5.5 erwähnt, gilt $\dim_H(\tilde{K}_{\tilde{\psi}}) = \dim_C(\tilde{K}_{\tilde{\psi}}) = \frac{\ln k}{-\ln \lambda} = \frac{\ln 2}{\ln \frac{5}{2}}$. Die Abbildung φ ist genau die in den Beispielen 2.1.1 und 4.2.1 betrachtete Zeltabbildung, deren invariante Menge \tilde{K}_φ die Standard-Cantor-Menge ist. Mit $K_1 := \tilde{K}_\varphi \cap I_1$ und $K_2 := \tilde{K}_\varphi \cap I_2$ ist $(\varphi, \tilde{K}_\varphi, K_1, K_2)$ ein 2-1-Endomorphismus-System, das die Eigenschaft (C1) erfüllt. Der einzige Singulärwert der Tangentialabbildung beträgt hier konstant $\alpha_1 = 3$. Da $\alpha_1 > 1$ gilt, ist es sinnvoll, den Tangentialraum $T_{\tilde{K}_\varphi} M$ als Bündel E^2 in der äquivarianten Zerlegung $T_{\tilde{K}_\varphi} M = E^1 \oplus E^2 \oplus E^3$ zu wählen und die Bündel $E^1 = E^3 = \{O_u \mid u \in \tilde{K}_\varphi\}$ anzusetzen. Die Singulärwertfunktion von φ auf \tilde{K}_φ bezüglich dieser Zerlegung hat dann die Form

$$\omega_{d, \tilde{K}_\varphi}^{E^1, E^2, E^3}(\varphi) = \left(\frac{1}{3}\right)^d$$

für alle $d \in [0, 1]$. Die topologische Entropie dieser Abbildung ist $\ln 2$, da die Zeltabbildung topologisch konjugiert zur Shiftabbildung im Raum der zweiseitig unendlichen Folgen mit zwei Symbolen ist. Damit hat die Bedingung (4.3.1) aus Satz 4.3.1 die Form $\left(\frac{1}{3}\right)^d < 2e^{-2\ln 2}$, das ist äquivalent zu $d > \frac{\ln 2}{\ln 3}$. Für alle diese Zahlen d liefert Satz 4.3.1 die Abschätzung $\dim_H(\tilde{K}_\varphi) \leq d$, im Grenzübergang also $\dim_H(\tilde{K}_\varphi) \leq \frac{\ln 2}{\ln 3}$. Folgerung 4.3.1 liefert denselben Wert, da der einzige globale Lyapunov-Exponent mit dem Logarithmus des Singulärwerts übereinstimmt. Mit (3.5.13) erhalten wir damit für die invariante Menge K der Hufeisenabbildung $\dim_H(K) \leq \frac{\ln 2}{\ln 5 - \ln 2} + \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 1,387$, also eine bessere Abschätzung (4.4.1).

4.4.2 Geodätische Flüsse

Als Beispiel eines kontinuierlichen invertierbaren dynamischen Systems sollen hier geodätische Flüsse auf glatten kompakten n -dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeiten (M, g) betrachtet werden. Geodätische Flüsse haben ein breites Anwendungsspektrum, da jedes volumenkonservative mechanische System im Rahmen des Lagrange-Formalismus als geodätische Differentialgleichung auf einer geeignet gewählten Mannigfaltigkeit betrachtet werden kann (siehe z. B. [43, 60]). Die Geodätischen γ_v ($v \in TM$) auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit sind, wie in Abschnitt 1.3 erwähnt wurde, Lösungen der Differentialgleichung $\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t) = 0$ mit den Anfangsbedingungen $\gamma_v(0) = \pi(v)$ und $\dot{\gamma}_v(0) = v$. Der geodätische Fluß $\varphi^{(\cdot)}(\cdot) : \mathbb{R} \times TM \rightarrow TM$, der wegen der Kompaktheit von M existiert, ist ein Fluß auf dem Tangentialbündel, definiert durch $\Phi(v, t) = \dot{\gamma}_v(t)$. Da die Geodätischen mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen werden, kann der geodätische Fluß auf das Einheitstangentenbündel $T^1 M = \{v \in M \mid \|v\| = 1\}$ eingeschränkt werden, er wirkt damit auf einer $(2n - 1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit.

Es sei $K \subset T^1M$ eine kompakte invariante Menge des geodätischen Flusses. Dann existiert nach Proposition 3.2.1 aus [43] eine äquivariante Zerlegung des Tangentialbündels $T_K T^1M$ in ein eindimensionales Teilbündel E^3 tangential zum Fluß und ein $(2n-2)$ -dimensionales Teilbündel transversal zum Fluß.

Wir nehmen nun an, daß alle zweidimensionalen Unterräume σ von $T_u M$ ($u \in M$) eine negative Schnittkrümmung $R(\sigma)$ besitzen. Da M glatt und K kompakt ist, gibt es positive Konstanten k_1, k_2 mit

$$-k_1^2 \leq R(\sigma) \leq -k_2^2$$

für alle Ebenen $\sigma \subset T_u M$ ($u \in \pi(K)$). Dann existiert nach Theorem 3.2.17 aus [43] eine äquivariante Zerlegung des $(2n-2)$ -dimensionalen Teilbündels von $T_K T^1M$ transversal zum Fluß in ein stabiles Teilbündel E^1 und ein instabiles Teilbündel E^2 , so daß in jedem Punkt $u \in K$ die Ungleichungen

$$\frac{k_2}{k_1} \|\xi\| e^{-k_1 t} \leq \|d_u \varphi^t(\xi)\| \leq \frac{k_1}{k_2} \|\xi\| e^{-k_2 t} \quad \text{für alle } \xi \in E_u^1,$$

$$\frac{k_1}{k_2} \|\xi\| e^{k_1 t} \geq \|d_u \varphi^t(\xi)\| \geq \frac{k_2}{k_1} \|\xi\| e^{k_2 t} \quad \text{für alle } \xi \in E_u^2$$

erfüllt sind. Mit dem zuvor eingeführten Bündel E^3 ist $E^1 \oplus E^2 \oplus E^3$ eine äquivariante Zerlegung von $T_K M$. Die globalen Lyapunov-Exponenten von φ auf K bezüglich der Zerlegung $E^1 \oplus E^2 \oplus E^3$ genügen der Abschätzung

$$-k_1 \leq \nu_i^u \leq -k_2 \quad (i = 1, \dots, 2n-2).$$

Damit gilt für alle natürlichen Zahlen $D < 2n-3$ die Ungleichung

$$2h_{\text{top}}(\varphi|_K) + \nu_1^u + \dots + \nu_D^u + \nu_{D+1}^u \leq 2h_{\text{top}}(\varphi|_K) - (D+1)k_2. \quad (4.4.2)$$

Wir nehmen nun an, daß $(n-1)k_2 > h_{\text{top}}(\varphi|_K)$ erfüllt ist. Es sei $D \in \{0, \dots, 2n-3\}$ die kleinste Zahl mit $(D+1)k_2 > 2h_{\text{top}}(\varphi|_K)$. Aus (4.4.2) folgt $2h_{\text{top}}(\varphi|_K) + \nu_1^u + \dots + \nu_D^u + \nu_{D+1}^u < 0$. Folgerung 4.1.1 liefert dann die Abschätzung

$$\begin{aligned} \dim_H(K) &\leq D+1 + \frac{2h_{\text{top}}(\varphi|_K) + \nu_1^u + \dots + \nu_D^u}{|\nu_{D+1}^u|} \\ &\leq D+1 + \frac{2h_{\text{top}}(\varphi|_K) - Dk_2}{k_1} \\ &= 1 + \frac{2h_{\text{top}}(\varphi|_K)}{k_1} + D \left(1 - \frac{k_2}{k_1}\right) \end{aligned}$$

für $(n-1)k_2 > h_{\text{top}}(\varphi|_K)$. Es sei bemerkt, daß wir, im Vergleich zu Satz 1.9.2, diese Abschätzung unter schwächeren Voraussetzungen erhalten haben, da an die Krümmung der zugrundeliegenden Mannigfaltigkeit keine „pinching condition“ gestellt werden muß.

Falls die Schnittkrümmung konstant $-k^2$ ist, erhält man aus der obigen Ungleichung

$$\dim_H(K) \leq 1 + \frac{2h_{\text{top}}(\varphi|_K)}{k},$$

falls $(n-1)k > h_{\text{top}}(\varphi|_K)$ gilt. Das ist dieselbe Schranke, die in [22] mit Hilfe des dort gezeigten Satzes 1.9.1 abgeleitet wurde.

4.4.3 Stückweise lineare Abbildungen auf dem Zylinder

Wir betrachten wieder wie in Abschnitt 3.5.2 als Mannigfaltigkeit (M, g) den flachen Zylinder und die darauf definierte nicht injektive Abbildung φ . Mit den in Abschnitt 3.5.2 eingeführten Mengen K, K_1, K_2 ist (φ, K, K_1, K_2) ein 2-1-Endomorphismus-System, für das die Eigenschaft (C1) erfüllt ist. Die Singulärwerte der Tangentialabbildung sind mit $\alpha_1(d_u\varphi) = 3$ und $\alpha_2(d_u\varphi) = 1$ konstant für alle $u \in K$.

Für jeden Punkt $u \in K$ bezeichne $E_u^1 \subset T_u M$ den Teilraum, der von den Eigenvektoren bezüglich des Eigenwerts $\alpha_2(d_u\varphi)$ von $\sqrt{(d_u\varphi)^* d_u\varphi}$ aufgespannt wird, und $E_u^2 \subset T_u M$ den Teilraum, der von den Eigenvektoren bezüglich des Eigenwerts $\alpha_1(d_u\varphi)$ von $\sqrt{(d_u\varphi)^* d_u\varphi}$ aufgespannt wird. Dann ist $T_K M = E^1 \oplus E^2 \oplus E^3$ eine äquivalente Zerlegung des Tangentialbündels, wenn für E^3 wieder das triviale Bündel betrachtet wird, das nur aus den Ursprüngen O_u der Tangentialräume $T_u M$ ($u \in K$) besteht.

Die Singulärwertfunktion von φ auf K bezüglich dieser Zerlegung hat dann die Form

$$\omega_{d,K}^{E^1, E^2, E^3}(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{für } d \in [0, 1], \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{d-1} & \text{für } d \in (1, 2]. \end{cases}$$

Die topologische Entropie dieser Abbildung ist $\ln 2$, da diese Abbildung wie die in Abschnitt 4.4.1 betrachtete Hufeisenabbildung topologisch konjugiert zur Shiftabbildung im Raum der zweiseitig unendlichen Folgen mit zwei Symbolen ist.

Die Bedingung (4.3.1) aus Satz 4.3.1 kann für Zahlen $d \leq 1$ nicht erfüllt werden. Für $d \in (1, 2]$ hat sie die Form $\left(\frac{1}{3}\right)^{d-1} < 2e^{-2\ln 2} = \frac{1}{2}$, was gleichbedeutend mit $d > 1 + \frac{\ln 2}{\ln 3}$ ist. Für alle diese Zahlen d liefert Satz 4.3.1 die Abschätzung $\dim_H(K) \leq d$. Im Grenzübergang $d \rightarrow 1 + \frac{\ln 2}{\ln 3}$ heißt das $\dim_H(K) \leq 1 + \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

Folgerung 4.3.1 liefert hier dieselbe Abschätzung, da die globalen Lyapunov-Exponenten mit den Logarithmen der Singulärwerte übereinstimmen.

4.4.4 Julia-Mengen von Polynomen in der komplexen Ebene

Wie schon in Beispiel 4.2.3 untersucht wurde, sind Polynome der Form $\varphi(z) = z^2 + c$ für Parameter $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| > 2$ auf ihrer Julia-Menge $K \subset \mathbb{C}$ jeweils ein 2-1-Endomorphismus mit der Eigenschaft (C1). Die topologische Entropie von φ auf K beträgt $\ln 2$ (siehe [28]). Als äquivariante Zerlegung des Tangentialraumes in bezug auf K betrachten wir die triviale Zerlegung $T_K M = E^1 \oplus E^2 \oplus E^3$ mit $E^1 = E^3 = \{0_u \mid u \in K\}$ und $E^2 = T_K M$.

Die Singulärwertfunktion der Ordnung $d \in [0, 2]$ von φ auf K bezüglich der Zerlegung $T_K M = E^1 \oplus E^2 \oplus E^3$ ist

$$\omega_{d,K}^{E^1, E^2, E^3}(\varphi) = \left(\frac{1}{2 \min_{z \in K} |z|} \right)^d.$$

Mit der Abschätzung (3.5.4) gilt

$$\omega_{d,K}^{E^1, E^2, E^3}(\varphi) \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{|c| - \sqrt{|2c|}}} \right)^d.$$

Die Bedingung (4.3.1) aus Satz 4.3.1 ist damit erfüllt, falls

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{|c| - \sqrt{|2c|}}} \right)^d < 2e^{-2 \ln 2} = \frac{1}{2}$$

gilt. Die letzte Ungleichung ist äquivalent zu (3.5.5). Damit erhalten wir mit Satz 4.3.1 die gleiche Abschätzung

$$\dim_H(K) \leq \frac{\ln 2}{\ln \left(2\sqrt{|c| - \sqrt{|2c|}} \right)} \quad \text{für } |c| > \frac{3}{2} + \sqrt{2}$$

wie mit Satz 3.4.2 in Abschnitt 3.5.3.

Die Übereinstimmung des Ergebnisses mit dem aus Abschnitt 3.5.3 resultiert daher, daß in der hier betrachteten äquivarianten Zerlegung das Bündel E^2 das einzige nichttriviale Teilbündel ist. Damit werden jeweils auf dem gesamten Tangentialraum nur die Tangentialabbildungen zu den Umkehrabbildungen φ_1^{-1} und φ_2^{-1} betrachtet. Dieselben Abbildungen werden in die Anwendung von Satz 3.4.2 als Tangentialabbildungen zu den lokalen Umkehrfunktionen einbezogen.

4.4.5 Iterierte Funktionensysteme

Die in Abschnitt 3.5.4 betrachteten iterierten Funktionensysteme mit der Eigenschaft (IF) lassen sich auf eine Abbildung φ , definiert durch (3.5.6), zurückführen, die ein

k -1-Endomorphismus mit der Eigenschaft (C1) ist. Die Mengen K_i sind dabei durch

$$K_i := S_i(K) \quad (i = 1, \dots, k)$$

definiert. Diese Mengen sind aufgrund von (IF) paarweise disjunkt und kompakt. Wegen von (3.5.6) gilt $\varphi(K_i) = K$, und die Eigenschaft (C1) folgt aus (IF). Damit können die Dimensionsabschätzungen aus Abschnitt 4.3 für invariante Mengen von iterierten Funktionensystemen angewendet werden, falls für K bezüglich φ eine äquivariante Zerlegung des Tangentialbündels existiert.

Im Gegensatz zu Abschnitt 3.5.4 ist es hier nicht sinnvoll, die Bedingungen an die Abbildung φ zu Bedingungen an die Abbildungen aus dem System $\mathcal{S} = \{S_i\}_{i=1}^k$ umzuformulieren. Singulärwerte von φ können durch Singulärwerte der Abbildungen S_i dargestellt werden. In die Sätze aus Abschnitt 4.3 geht jedoch zusätzlich die topologische Entropie mit ein, so daß die Abbildung φ auf jeden Fall bestimmt werden muß, um die topologische Entropie zu ermitteln.

Betrachten wir als Beispiel wieder das iterierte Funktionensystem (3.5.9), für das die Standard-Cantor-Menge C invariant ist. Die Abbildung φ hat hier die Form

$$\varphi(x) = \begin{cases} 3x & \text{für } x \in C \cap [0, \frac{1}{3}], \\ 3x - 2 & \text{für } x \in C \cap [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Da φ auf C , wie auch die in Abschnitt 4.4.1 betrachtete Hufeisenabbildung und die in Abschnitt 4.4.3 analysierte stückweise lineare Abbildung auf dem Zylinder, topologisch konjugiert zur Shiftabbildung im Raum der zweiseitig unendlichen Folgen mit zwei Symbolen ist, gilt $h_{\text{top}}(\varphi) = \ln 2$. Die zugrundeliegende Mannigfaltigkeit \mathbb{R} ist eindimensional, somit kommt nur eine triviale Zerlegung des Tangentialbündels in Frage. Da die Abbildung streckend wirkt, ist es sinnvoll, $E^2 = T_C M$ und $E^1 = E^3 = \{O_u \mid u \in C\}$ zu setzen. Bezüglich dieser Zerlegung hat die Singulärwertfunktion die Form

$$\omega_{d,K}^{E^1, E^2, E^3}(\varphi) = \left(\frac{1}{3}\right)^d$$

für alle $d \in [0, 1]$. Bedingung (4.3.1) geht in die Ungleichung

$$\left(\frac{1}{3}\right)^d < 2e^{-2 \ln 2} = \frac{1}{2}$$

über, die für alle $d > \frac{\ln 2}{\ln 3}$ erfüllt ist. Also liefert Satz 4.3.1 im Grenzübergang $d \rightarrow \frac{\ln 2}{\ln 3}$ die Abschätzung

$$\dim_H(C) \leq \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

Die Folgerung 4.3.1 führt hier zum gleichen Ergebnis, da der einzige globale Lyapunov-Exponent $(-\ln 3)$ beträgt und somit mit dem Logarithmus des Singulärwerts übereinstimmt.

Wie schon in Abschnitt 3.5.4 erwähnt, gilt für die Standard-Cantor-Menge

$$\dim_H(C) = \frac{\ln 2}{\ln 3},$$

so daß wir hier eine scharfe Abschätzung erhalten.

Kapitel 5

Untere Dimensionsschranken für k -1-Endomorphismen

Im Vergleich zu oberen Abschätzungen der Hausdorff-Dimension sind untere Dimensionsabschätzungen verhältnismäßig schwer zu finden. Eine Zahl d ist eine obere Schranke für die Hausdorff-Dimension einer Menge, wenn das äußere Hausdorffsche d -Maß dieser Menge gleich Null ist. Das kann, wie in den vorangegangenen Kapiteln, dadurch gezeigt werden, daß für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ eine Folge $\{\mathcal{U}_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ von Überdeckungen durch Kugeln mit Radien höchstens ε konstruiert wird, so daß die Summe über alle Radien zur Potenz d gegen Null geht. Zu jedem hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ sind also nur abzählbar viele Kugelüberdeckungen zu betrachten, die iterativ konstruiert werden können.

Dagegen ist eine Zahl d eine untere Schranke für die Hausdorff-Dimension einer Menge, wenn das äußere Hausdorffsche d -Maß dieser Menge größer als Null ist. Damit muß es eine Zahl $\delta > 0$ geben, so daß für jedes $\varepsilon > 0$ das äußere Hausdorffsche (d, ε) -Maß größer als δ ist. Für jede Kugelüberdeckung der Menge durch Kugeln mit Radien höchstens ε muß also die Summe der Radien zur Potenz d größer als δ sein. Es müssen daher zu jedem ε alle möglichen Kugelüberdeckungen betrachtet werden. Aussagen über untere Schranken der Hausdorff-Dimension für invariante Mengen allgemeiner Abbildungen sind daher sehr selten. Eine Ausnahme bilden ganzzahlige untere Schranken, die man über die Betrachtung von instabilen Mannigfaltigkeiten von Ruhelagen oder periodischen Orbits erhalten kann ([49, 69]). Haben invariante Mengen Zusatzeigenschaften wie Hyperbolizität oder Selbstähnlichkeit, sind Dimensionsabschätzungen von unten häufiger ableitbar (siehe z. B. [41]).

Auch invariante Mengen von k -1-Endomorphismen haben eine sehr spezielle geometrische Struktur. Deshalb kann für diese Mengen eine im allgemeinen nichtganzzahlige untere Dimensionsschranke in Abhängigkeit vom größten Singulärwert der Tangentialabbildung angegeben werden. Zusammen mit den Abschätzungen aus Abschnitt 4.3 kann man damit den exakten Dimensionswert in ein Intervall einschließen. Ist in diesem Intervall kein ganzzahliger Wert enthalten, so muß die Hausdorff-

Dimension der betrachteten Menge nichtganzzahlig sein, diese Menge hat dann also eine komplizierte geometrische Struktur.

5.1 Untere Dimensionsabschätzung

Für abbildungsinvariante Mengen, für die ein äußeres Borel-Maß mit den in Lemma 1.10.1 vorausgesetzten Eigenschaften existiert, kann mit Hilfe des aus der Potentialtheorie stammenden Lemmas von Frostman (Lemma 1.10.1) eine untere Abschätzung der Hausdorff-Dimension angegeben werden. In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß eine untere Dimensionsschranke auch ohne Konstruktion eines solchen äußeren Maßes erreicht werden kann. Dazu wollen wir ähnlich wie M. A. Shereshevskij im Beweis von Satz 1.10.1 in [66] vorgehen. Die Struktur der invarianten Menge K eines k -1-Endomorphismus ist ähnlich wie die Struktur der Menge D in Satz 1.10.1: Die Bedingungen 1) und 2) aus Satz 1.10.1 sind für die Mengen K_{i_1, \dots, i_p} erfüllt, wenn wir die Reihenfolge der Indizes umkehren. Das eigentliche Problem besteht hier darin, daß wir für die Mengen K_{i_1, \dots, i_p} keine Größe analog zur Intervalllänge $|D_{\omega_1, \dots, \omega_p}|$ haben, die im Beweis von Satz 1.10.1 in [66] dazu benutzt wird, die Anzahl der Mengen $D_{\omega_1, \dots, \omega_p}$ abzuschätzen, die höchstens von einer Kugel mit vorgegebenem Radius überdeckt werden können. Das n -dimensionale Volumen V läßt sich anstelle der Intervalllänge nicht verwenden, da im allgemeinen die Menge K eine Dimension kleiner als n hat und damit das Volumen der Mengen K_{i_1, \dots, i_p} stets Null ist. Wir können aber in allgemeinen metrischen Räumen eine Aussage analog zu Satz 1.10.1 zeigen, die anstelle der Intervalllängen die Abstände der Teilmengen verwendet.

Satz 5.1.1 *Es seien (X, ϱ) ein metrischer Raum und $k \geq 2$ eine natürliche Zahl. Für jede Zahl $p \in \mathbb{N}$ und jedes p -Tupel $(\omega_1, \dots, \omega_p) \in \{1, \dots, k\}^p$ existiere eine nichtleere kompakte Menge $D_{\omega_1, \dots, \omega_p} \subset X$ mit den folgenden Eigenschaften:*

- 1) Für zwei p -Tupel $(\omega_1, \dots, \omega_p) \neq (\omega'_1, \dots, \omega'_p)$ gilt $D_{\omega_1, \dots, \omega_p} \cap D_{\omega'_1, \dots, \omega'_p} = \emptyset$.
- 2) Für jedes $(\omega_1, \dots, \omega_p, \omega_{p+1}) \in \{1, \dots, k\}^{p+1}$ gilt $D_{\omega_1, \dots, \omega_{p+1}} \subset D_{\omega_1, \dots, \omega_p}$.

Falls es Zahlen $\alpha > 0$ und $r \in (0, 1)$ gibt, so daß

$$\varrho(x, y) \geq \alpha r^p \tag{5.1.1}$$

für alle $x \in D_{\omega_1, \dots, \omega_p}$, alle $y \in D_{\omega'_1, \dots, \omega'_p}$, alle $p \in \mathbb{N}$ und alle p -Tupel $(\omega_1, \dots, \omega_p) \neq (\omega'_1, \dots, \omega'_p) \in \{1, \dots, k\}^p$ gilt, so kann die Hausdorff-Dimension der Menge

$$D = \bigcap_{p=1}^{\infty} \bigcup_{(\omega_1, \dots, \omega_p) \in \{1, \dots, k\}^p} D_{\omega_1, \dots, \omega_p}$$

nach unten durch $\dim_H(D) \geq -\frac{\ln k}{\ln r}$ abgeschätzt werden.

Beweis Für jedes $p \in \mathbb{N}$ seien die Mengen $D_{\omega_1, \dots, \omega_p}$ ($(\omega_1, \dots, \omega_p) \in \{1, \dots, k\}^p$) im weiteren als Mengen vom Rang p bezeichnet. Mit $d := -\frac{\ln k}{\ln r}$ gilt die Beziehung

$$k = r^{-d}. \quad (5.1.2)$$

Es sei $\{B(u_i, r_i)\}_{i \in \tilde{I}}$ eine beliebige Überdeckung von D durch Kugeln mit Radien $r_i \leq \frac{\alpha r}{2}$, wobei \tilde{I} eine beliebige Indexmenge ist. Die Menge D ist als abzählbarer Durchschnitt kompakter Mengen auch kompakt. Also können wir eine endliche Menge $I \subset \tilde{I}$ auswählen, so daß $\{B(u_i, r_i)\}_{i \in I}$ immer noch eine Überdeckung von D ist. Für jedes $i \in I$ existiert eine Zahl $p_i \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{\alpha}{2} r^{p_i+1} < r_i \leq \frac{\alpha}{2} r^{p_i}.$$

Es sei $P := \max_{i \in I} p_i$, und $N_p := |\{i \in I \mid p_i = p\}|$ ($p = 1, \dots, P$) sei die Anzahl der Indizes aus I , für die $p_i = p$ gilt. Dann ist

$$\sum_{i \in I} r_i^d > \sum_{i \in I} \left(\frac{\alpha}{2} r^{p_i+1} \right)^d = \sum_{p=1}^P N_p \left(\frac{\alpha}{2} r^{p+1} \right)^d = \left(\frac{\alpha r}{2} \right)^d \sum_{p=1}^P N_p r^{pd}.$$

Mit (5.1.2) folgt daraus die Ungleichung

$$\sum_{i \in I} r_i^d > \left(\frac{\alpha r}{2} \right)^d \sum_{p=1}^P N_p k^{-p}. \quad (5.1.3)$$

Wegen $r_i \leq \frac{\alpha}{2} r^{p_i}$ kann eine Kugel vom Radius r_i Punkte aus höchstens einer Menge vom Rang p_i überdecken. Jede Menge vom Rang p_i besteht aus k^{P-p_i} Mengen vom Rang P . Also kann eine Kugel vom Radius r_i Punkte aus höchstens k^{P-p_i} Mengen vom Rang P überdecken. Da $\{B(u_i, r_i)\}_{i \in I}$ eine Überdeckung von D ist, müssen durch $\{B(u_i, r_i)\}_{i \in I}$ Punkte aus allen k^P Mengen vom Rang P überdeckt werden, denn es gilt $D_{\omega_1, \dots, \omega_P} \cap D \neq \emptyset$ für alle P -Tupel $(\omega_1, \dots, \omega_P) \in \{1, \dots, k\}^P$. Also muß

$$\sum_{i \in I} k^{P-p_i} = \sum_{p=1}^P N_p k^{P-p} \geq k^P$$

gelten. Diese Ungleichung ist äquivalent zu $\sum_{p=1}^P N_p k^{-p} \geq 1$. Zusammen mit (5.1.3) folgt daraus

$$\sum_{i \in I} r_i^d > \left(\frac{\alpha r}{2} \right)^d.$$

Da diese Beziehung für jede beliebige Überdeckung von D mit Kugeln vom Radius höchstens $\frac{\alpha r}{2}$ gilt, heißt das

$$\mu_H \left(D, d, \frac{\alpha r}{2} \right) \geq \left(\frac{\alpha r}{2} \right)^d > 0.$$

Aufgrund der Monotonie von $\mu_H(D, d, \cdot)$ folgt daraus $\mu_H(D, d) > 0$ und somit $\dim_H(K) \geq d$. ■

Unter Nutzung von Satz 5.1.1 können wir nun die folgende untere Schranke der Hausdorff-Dimension für invariante Mengen von k -1-Endomorphismen nachweisen:

Satz 5.1.2 *Es seien (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche C^3 -Mannigfaltigkeit und $(\varphi, K, K_1, \dots, K_k)$ ein k -1-Endomorphismus-System mit $k \geq 2$ und der Eigenschaft (C1) aus Abschnitt 4.2. Falls für den größten Singulärwert von $d_u \varphi$ die Ungleichung*

$$\alpha_1(d_u \varphi) \geq k^{\frac{1}{n}} \quad \text{für alle } u \in K \quad (5.1.4)$$

gilt, dann kann die Hausdorff-Dimension der invarianten Menge K nach unten durch

$$\dim_H(K) \geq \frac{\ln k}{\ln \sup_{u \in K} \alpha_1(d_u \varphi)}$$

abgeschätzt werden.

Beweis Wie schon bemerkt, erfüllen die Mengen K_{i_1, \dots, i_p} ($(i_1, \dots, i_p) \in \{1, \dots, k\}^p$, $p \in \mathbb{N}$) die Bedingungen 1) und 2) von Satz 5.1.1, wenn wir die Reihenfolge der Indizes umkehren. Um Satz 5.1.1 anwenden zu können, müssen wir nun noch die Eigenschaft (5.1.1) nachweisen.

Es sei $d \in \left(0, \frac{\ln k}{\ln \sup_{u \in K} \alpha_1(d_u \varphi)}\right)$ eine beliebige Zahl. Da wir $k \geq 2$ vorausgesetzt hatten, ist dieses Intervall für d nichtleer. Aus (5.1.4) und $k \geq 2$ ergibt sich $\sup_{u \in K} \alpha_1(d_u \varphi) > 1$. Somit existiert eine Zahl $\alpha > \sup_{u \in K} \alpha_1(d_u \varphi)$ mit

$$k = \alpha^d. \quad (5.1.5)$$

Dann gibt es eine offene Menge V mit $K \subset V \subset U$, so daß $\alpha_1(d_u \varphi) \leq \alpha$ für alle $u \in V$ gilt. Es sei $\delta_1 := \inf\{\varrho(u_i, u_j) \mid u_i \in K_i, u_j \in K_j, 1 \leq i < j \leq k\}$ der Mindestabstand zwischen den Mengen K_1, \dots, K_k . Da die Mengen K_1, \dots, K_k paarweise disjunkt sind, gilt $\delta_1 > 0$. Weiterhin existiert eine Zahl $\delta_2 > 0$, so daß jede Kugel vom Radius δ_2 , die Punkte aus K enthält, vollständig in V enthalten ist.

Es sei nun $\delta \in (0, \min\{\delta_1, \delta_2\})$ eine beliebige Zahl. Weiterhin seien $p \in \mathbb{N}$ eine beliebige Zahl, $(i_1, \dots, i_p), (j_1, \dots, j_p) \in \{1, \dots, k\}^p$ zwei beliebige, aber voneinander verschiedene p -Tupel und $u \in K_{i_1, \dots, i_p}$ und $v \in K_{j_1, \dots, j_p}$ zwei beliebige Punkte. Induktiv wollen wir zeigen, daß dann $\varrho(u, v) > \delta \alpha^{1-p}$ gilt. Für $p = 1$ ist das offensichtlich erfüllt. Wir nehmen nun an, daß diese Behauptung für ein $p \in \mathbb{N}$ erfüllt ist und wollen sie für $p + 1$ nachweisen. Dazu betrachten wir zwei Fälle. Im ersten Fall sei $i_{p+1} \neq j_{p+1}$. Dann ist $u \in K_{i_{p+1}}$ und $v \in K_{j_{p+1}}$ mit $i_{p+1} \neq j_{p+1}$, also gilt

$\varrho(u, v) \geq \delta_1 > \delta$. Wegen $\alpha > 1$ ist dann auch $\varrho(u, v) > \delta\alpha^{-p}$. Im zweiten Fall betrachten wir nun $i_{p+1} = j_{p+1}$. Dann muß $(i_1, \dots, i_p) \neq (j_1, \dots, j_p)$ gelten. Wegen $\varphi(u) \in K_{i_1, \dots, i_p}$ und $\varphi(v) \in K_{j_1, \dots, j_p}$ gilt dann aufgrund der Induktionsvoraussetzung $\varrho(\varphi(u), \varphi(v)) > \delta\alpha^{1-p}$. Für $\varrho(u, v) > \delta$ ist die Behauptung offensichtlich erfüllt. Wir betrachten deshalb im weiteren $\varrho(u, v) \leq \delta$. Dann gilt $v \in B(u, \delta_2) \subset V \subset U$, also ist die Abbildung φ auf der gesamten Kugel $B(u, \delta_2)$, die v enthält, definiert. Da φ eine C^1 -Abbildung auf U ist, können wir die Taylor-Formel anwenden und erhalten $\varrho(\varphi(u), \varphi(v)) \leq \alpha\varrho(u, v)$. Also gilt $\varrho(u, v) > \alpha^{-1}\delta\alpha^{1-p} = \delta\alpha^{-p}$.

Damit ist die Bedingung (5.1.1) in der Form $\varrho(u, v) > \delta\alpha^{1-p}$ für jedes $p \in \mathbb{N}$, beliebige voneinander verschiedene p -Tupel $(i_1, \dots, i_p), (j_1, \dots, j_p) \in \{1, \dots, k\}^p$ und beliebige Punkte $u \in K_{i_1, \dots, i_p}$ und $v \in K_{j_1, \dots, j_p}$ erfüllt. Daraus folgt mit Satz 5.1.1 die Abschätzung $\dim_H(K) \geq \frac{\ln k}{\ln \alpha} = d$. Im Grenzübergang $d \rightarrow \frac{\ln k}{\ln \sup_{u \in K} \alpha_1(d_u \varphi)}$ heißt das $\dim_H(K) \geq \frac{\ln k}{\ln \sup_{u \in K} \alpha_1(d_u \varphi)}$. ■

Bemerkung 5.1.1 Die Bedingung (5.1.4) stellt keine echte Einschränkung dar, da im Fall $\sup_{u \in K} \alpha_1(d_u \varphi) < k^{\frac{1}{n}}$ die Hausdorff-Dimension der invarianten Menge K explizit bekannt ist: Wir betrachten dazu die Abbildung φ als allgemeine nicht injektive Abbildung. Die Menge K enthält wegen (C1) keine kritischen Punkte. Die Vielfachheitsfunktion dieser Abbildung ist konstant k . Im Fall $\sup_{u \in K} \alpha_1(d_u \varphi) < k^{\frac{1}{n}}$ sind damit alle Voraussetzungen von Satz 3.4.1 für beliebiges $d \in (0, 1]$ erfüllt, und wir erhalten $\dim_H(K) = 0$.

5.2 Anwendungsbeispiele

Wir wollen hier die untere Dimensionsabschätzung auf einige Beispielabbildungen aus Abschnitt 4.4 anwenden, um die untere Dimensionsschranke mit der oberen Schranke vergleichen zu können.

5.2.1 Zeltabbildung

Gegeben sei die in den Beispielen 2.1.1 und 4.2.1 sowie in Abschnitt 4.4.1 betrachtete Zeltabbildung φ . Eine invariante Menge K dieser Abbildung ist die Standard-Cantor-Menge. Wie in Abschnitt 4.4.1 erwähnt wurde, ist (φ, K, K_1, K_2) mit $K_1 = K \cap [0, \frac{1}{3}]$ und $K_2 = K \cap [\frac{2}{3}, 1]$ ein 2-1-Endomorphismus-System, das die Eigenschaft (C1) erfüllt. Hier gilt $\alpha_1(d_u \varphi) = 3$ unabhängig vom Punkt $u \in K$, also ist die Bedingung (5.1.4) erfüllt. Mit Satz 5.1.2 erhalten wir die untere Schranke $\dim_H(K) \geq \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

In Abschnitt 4.4.1 ist derselbe Wert als obere Schranke erhalten worden, also haben wir damit sogar $\dim_H(K) = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ nachgewiesen.

5.2.2 Stückweise lineare Abbildungen auf dem Zylinder

Wir betrachten erneut das 2-1-Endomorphismus-System (φ, K, K_1, K_2) aus den Abschnitten 3.5.2 und 4.4.3 auf dem flachen Zylinder. Für dieses System ist die Eigenschaft (C1) erfüllt. Der größte Singulärwert der Tangentialabbildung ist $\alpha_1(d_u\varphi) = 3$ unabhängig vom Punkt $u \in K$. Damit ist die Bedingung (5.1.4) aus Satz 5.1.2 erfüllt, und wir erhalten $\dim_H(K) \geq \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

Zusammen mit der oberen Abschätzung aus Abschnitt 4.4.3 ergibt sich hier mit $\dim_H(K) \in [\frac{\ln 2}{\ln 3}, 1 + \frac{\ln 2}{\ln 3}]$ nur ein Intervall, in dem der Wert für die Hausdorff-Dimension liegt.

Wie in Abschnitt 3.5.2 erwähnt wurde, stimmt die obere Schranke mit dem exakten Dimensionswert überein, wobei die untere Schranke noch sehr weit vom tatsächlichen Wert entfernt ist. Der Grund dafür ist, daß in die untere Abschätzung nur der größte Singulärwert eingeht, so daß der Fehler um so größer wird, je mehr sich die Singulärwerte voneinander unterscheiden.

5.2.3 Julia-Mengen

Betrachtet werden die Julia-Mengen quadratischer Polynome in der komplexen Ebene aus den Abschnitten 3.5.3 und 4.4.4. Wie in Beispiel 4.2.3 gezeigt wurde, sind Polynome der Form $\varphi(z) = z^2 + c$ für Parameter $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| > 2$ auf ihrer Julia-Menge $K \subset \mathbb{C}$ jeweils ein 2-1-Endomorphismus mit der Eigenschaft (C1). Hier haben wir für jedes $z \in \mathbb{C}$ die zwei übereinstimmenden Singulärwerte

$$\alpha_1(d_z\varphi) = \alpha_2(d_z\varphi) = 2|z|.$$

Insbesondere gilt also $\sup_{z \in K} \alpha_1(d_z\varphi) = 2 \sup_{z \in K} |z|$. Mit (3.5.4) folgt daraus

$$2\sqrt{|c| - \sqrt{|2c|}} \leq \sup_{z \in K} \alpha_1(d_z\varphi) \leq 2\sqrt{|c| + \sqrt{|2c|}}.$$

Damit ist Bedingung (5.1.4) aus Satz 5.1.2 erfüllt, falls $2\sqrt{|c| - \sqrt{|2c|}} \geq \sqrt{2}$ gilt, d. h. für alle Parameter c mit $|c| \geq \frac{3}{2} + \sqrt{2}$. In diesem Fall kann Satz 5.1.2 angewendet werden und liefert

$$\dim_H(K) \geq \frac{\ln 2}{\ln \left(2\sqrt{|c| + \sqrt{|2c|}} \right)} \quad \text{für } |c| \geq \frac{3}{2} + \sqrt{2}.$$

Zusammen mit der unteren Abschätzung aus Abschnitt 4.4.4 erhalten wir damit für die Hausdorff-Dimension der Julia-Menge K der Abbildung $\varphi(z) = z^2 + c$ die Einschließung

$$\frac{\ln 2}{\ln \left(2\sqrt{|c| + \sqrt{|2c|}} \right)} \leq \dim_H(K) \leq \frac{\ln 2}{\ln \left(2\sqrt{|c| - \sqrt{|2c|}} \right)} \quad \text{für } |c| > \frac{3}{2} + \sqrt{2}.$$

Dies sind dieselben oberen und unteren Schranken, die auch in [21] erhalten wurden. Für betragsmäßig große Parameterwerte ergibt sich daraus das asymptotische Verhalten $\dim_H(K) \sim \frac{2\ln 2}{\ln|c|}$ (siehe auch [64]).

Literaturverzeichnis

- [1] ABRAHAM, R., J. E. MARSDEN und T. RATIU: *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Springer, New York, 2. Auflage, 1988.
- [2] ADLER, R. A., A. KONHEIM und M. MCANDREW: *Topological entropy*. Trans. Amer. Math. Soc., 114:309–319, 1965.
- [3] AFRAIMOVICH, V. S. und L. O. CHUA: *Enigma of the double-scroll Chua's attractor*. In: MADAN, R. N. (Herausgeber): *Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos*, Seiten 754–765, World Scientific, Singapore, 1993.
- [4] ANOSOV, D. V.: *Geodesic flows on closed Riemannian manifolds with negative curvature*. In: *Proc. Steklov Inst. Math.*, Band 90, 1967. (in Russisch).
- [5] BARNESLEY, M. F. und S. DEMKO: *Iterated function systems and the global construction of fractals*. Proc. Royal Soc. London A, 399:243–275, 1985.
- [6] BARREIRA, L. M.: *Cantor sets with complicated geometry and modeled by general symbolic dynamics*. Random & Computational Dynamics, 3:213–239, 1995.
- [7] BAUER, H.: *Maß- und Integrationstheorie*. De Gruyter, Berlin, 2. Auflage, 1992.
- [8] BELYKH, V. N. und I. L. SHELESNYAK: *Dimension estimates for a strange attractor of a two-dimensional discontinuous map*. In: *Methods of qualitative theory and theory of bifurcations*, Seiten 12–17, University of Nishny Novgorod, 1992. (in Russisch).
- [9] BOICHENKO, V. A., A. FRANZ, G. A. LEONOV und V. REITMANN: *Hausdorff and fractal dimension estimates for invariant sets of non-injective maps*. ZAA, 17(1):207–223, 1998.
- [10] BOICHENKO, V. A., G. A. LEONOV und V. REITMANN: *Dimension Theory for Ordinary Differential Equations*. Marcel Dekker, New York, 1998. (Manuskript).
- [11] BOTHE, H. G.: *Shift spaces and attractors in non invertible horse shoes*. Preprint 30/96, DFG-Schwerpunktprogramm „Dynamik: Analysis, effiziente Simulation und Ergodentheorie“, 1996.

- [12] BOWEN, R.: *Topological entropy and Axiom A*. Global Analysis, Amer. Math. Soc. Proc. Symposia Pure Math., 14:23–41, 1968.
- [13] BOWEN, R.: *Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces*. Trans. Amer. Math. Soc., 153:401–414, 1971.
- [14] BRONSTEIN, I. N., K. A. SEMENDJAJEW, G. MUSIOL und H. MÜHLIG (Herausgeber): *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2. Auflage, 1995.
- [15] CHEN, Z.-M.: *A note on Kaplan-Yorke-type estimates on the fractal dimension of chaotic attractors*. Chaos, Solitons & Fractals, 3:575–582, 1993.
- [16] CHOQUET-BRUHAT, Y., C. DEWITT-MORETTE und M. DILLARD-BLEICK: *Analysis, Manifolds and Physics*. North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [17] DENG, B.: *Folding at the genesis of chaos*. In: *Proceedings of the First World Congress of Nonlinear Analysts*, Seiten 3765–3777, De Gruyter, New York, 1992.
- [18] DOUADY, A. und J. OESTERLÉ: *Dimension de Hausdorff des attracteurs*. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A, 290:1135–1138, 1980.
- [19] ELSTRODT, J.: *Maß- und Integrationstheorie*. Springer, Berlin, 1996.
- [20] FALCONER, K. J.: *Dimensions - their determination and properties*. In: BÈLAIR, J. und S. DUBUC (Herausgeber): *Fractal Geometry and Analysis*, Seiten 1–44, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.
- [21] FALCONER, K. J.: *Fraktale Geometrie: Mathematische Grundlagen und Anwendungen*. Spektrum, Berlin, 1993.
- [22] FATHI, A.: *Expansiveness, hyperbolicity and Hausdorff dimension*. Commun. Math. Phys., 126:249–262, 1989.
- [23] FEDERER, H.: *Geometric Measure Theory*. Springer, New York, 1969.
- [24] FRANZ, A.: *Lower Hausdorff dimension estimates for k -1-endomorphisms*. Preprint 49/97, DFG-Schwerpunktprogramm „Dynamik: Analysis, effiziente Simulation und Ergodentheorie“, 1997.
- [25] FRANZ, A.: *Dimension estimates of map-invariant sets using weighted Hausdorff measures*. In: *Program of the Conference on Fractal Geometry and Stochastics II*, Seite 22, Greifswald, 1998.
- [26] FRANZ, A.: *Hausdorff dimension estimates for invariant sets with an equivariant tangent bundle splitting*. Nonlinearity, 11:1063–1074, 1998.

- [27] GALLOT, S., D. HULIN und J. LAFONTAINE: *Riemannian Geometry*. Springer, Berlin, 2. Auflage, 1990.
- [28] GROMOV, M.: *On the entropy of holomorphic maps*. Preprint, Institut des Hautes Études Scientifiques.
- [29] GU, X.: *An upper bound for the Hausdorff dimension of a hyperbolic set*. Nonlinearity, 4:927–934, 1991.
- [30] HALMOS, P. R.: *Measure Theory*, Band 18 der Reihe *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 1988.
- [31] HASSELBLATT, B. und A. KATOK: *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Band 54 der Reihe *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, New York, 1995.
- [32] HAYMAN, W. K. und P. B. KENNEDY: *Subharmonic Functions*, Band 1. Academic Press, New York, 1976.
- [33] HEINEKEN, W.: *Abschätzung der fraktalen Dimension abbildungsinvarianter Mengen auf Mannigfaltigkeiten*. Diplomarbeit, Technische Universität Dresden, 1997.
- [34] HEUSER, H.: *Lehrbuch der Analysis Teil 2*. B. G. Teubner, Stuttgart, 5. Auflage, 1990.
- [35] HILDEBRANDT, T. H.: *Introduction to the Theory of Integration*. Academic Press, New York, 1963.
- [36] HOWROYD, J. D.: *On dimension and on the existence of sets of finite positive Hausdorff measure*. Proc. London Math. Soc., 70(3):581–604, 1995.
- [37] HUNT, B. R. A.: *Maximum local Lyapunov dimension bounds the box dimension of chaotic attractors*. Nonlinearity, 9:845–852, 1996.
- [38] HUTCHINSON, J. E.: *Fractals and self similarity*. Indiana University Mathematics Journal, 30(5):713–747, 1981.
- [39] IL'YASHENKO, YU. S. und A. N. CHETAEV: *On the dimension of attractors for a class of dissipative systems*. J. Appl. Math. Mech., 46(3):290–295, 1982.
- [40] JÄNICH, K.: *Vektoranalysis*. Springer, Berlin, 2. Auflage, 1993.
- [41] KAN, I.: *Strange attractors of uniform flows*. Transactions of the American Mathematical Society, 293(1):135–159, 1986.
- [42] KELLY, J. L. und T. P. SRINIVASAN: *Measure and Integral*, Band 116 der Reihe *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 1988.

- [43] KLINGENBERG, W. P. A.: *Riemannian Geometry*. De Gruyter, Berlin, 2. Auflage, 1995.
- [44] KÖNIGSBERGER, K.: *Analysis 2*. Springer, Berlin, 1993.
- [45] LEDRAPPIER, F.: *Some relations between dimension and Lyapunov exponents*. Commun. Math. Phys., 81:229–238, 1981.
- [46] LEONOV, G. A.: *On estimations of Hausdorff dimension of attractors*. Vestnik Leningrad Univers. Ser. 1, 3:41–44, 1991. (in Russisch).
- [47] LEONOV, G. A. und V. A. BOICHENKO: *Lyapunov's direct method in the estimation of the Hausdorff dimension of attractors*. Acta Appl. Math., 26:1–60, 1992.
- [48] LEONOV, G. A., I. M. BURKIN und A. I. SHEPELYAWYI: *Frequency Methods in Oscillation Theory*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.
- [49] LI, M. Y. und J. S. MULDOWNY: *Lower bounds for the Hausdorff dimension of attractors*. Journal of Dynamics and Differential Equations, 7(3):457–469, 1995.
- [50] MALLET-PARET, J.: *Negatively invariant sets of compact maps and an extension of a theorem of Cartwright*. Journal of Differential Equations, 22(2):331–348, 1976.
- [51] MARSTRAND, J. M.: *The dimension of cartesian product sets*. Proc. Cambr. Phil. Soc., 50:198–202, 1954.
- [52] MEDVED, M.: *Fundamentals of Dynamical Systems and Bifurcation Theory*. Adam Hilger, Bristol, 1991.
- [53] MEISTERS, J. H. und C. OLECH: *Locally one-to-one mappings and a classical theorem of schlicht functions*. Duke Math. J., 30:63–80, 1963.
- [54] MIRLE, A.: *Abschätzung der Hausdorff-Dimension invarianter Mengen von nichtinjektiven Abbildungen*. Diplomarbeit, Technische Universität Dresden, 1995.
- [55] MIRLE, A.: *Hausdorff dimension estimates for invariant sets of k -1-maps*. Preprint 25/95, DFG-Schwerpunktprogramm „Dynamik: Analysis, effiziente Simulation und Ergodentheorie“, 1995.
- [56] NOACK, A.: *Dimensionsabschätzungen invarianter Mengen für dynamische Systeme auf Mannigfaltigkeiten*. Diplomarbeit, Technische Universität Dresden, 1994.
- [57] NOACK, A.: *Dimensions- und Entropieabschätzungen sowie Stabilitätsuntersuchungen für nichtlineare Systeme auf Mannigfaltigkeiten*. Dissertation, Technische Universität Dresden, 1998.

- [58] NOACK, A. und V. REITMANN: *Hausdorff dimension of invariant sets of time-dependent vector fields*. ZAA, 15(2):457–473, 1996.
- [59] OSIPENKO, G. S.: *Integration of invariant fields of planes, splitting, partial hyperbolicity*. Differential equations, 10:1687–1693, 1983. (in Russisch).
- [60] PIN, O. C.: *Curvature and Mechanics*. Advances in Mathematics, 15:269–311, 1975.
- [61] PRZYTICKI, F. und M. URBANSKI: *On the Hausdorff dimension of some fractal sets*. Studia Mathematica, 18:155–186, 1989.
- [62] REITMANN, V.: *Reguläre und chaotische Dynamik*. B. G. Teubner, Leipzig, 1996.
- [63] REITMANN, V. und U. SCHNABEL: *Hausdorff dimension estimates for invariant sets of piecewise smooth maps*. Preprint 50/97, DFG-Schwerpunktprogramm „Dynamik: Analysis, effiziente Simulation und Ergodentheorie“, 1997.
- [64] RUELLE, D.: *Repellers for real analytic maps*. Ergodic Theory & Dynamical Systems, 2:99–108, 1982.
- [65] SCHMELING, J.: *A dimension formula for endomorphisms - the Belykh family*. Preprint 29/96, DFG-Schwerpunktprogramm „Dynamik: Analysis, effiziente Simulation und Ergodentheorie“, 1996.
- [66] SHERESHEVSKIJ, M. A.: *The Hausdorff dimension of a basis set created when a saddle-saddle type equilibrium vanishes*. Methods of Qualitative Theory of Differential Equations, Seiten 139–150, 1986. (in Russisch).
- [67] SHUB, M.: *Global Stability of Dynamical Systems*. Springer, New York, 1987.
- [68] SULANKE, R. und P. WINTGEN: *Differentialgeometrie und Faserbündel*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1972.
- [69] TEMAM, R.: *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*. Springer, New York, 1988.
- [70] THIEULLEN, P.: *Entropy and the Hausdorff dimension for infinite-dimensional dynamical systems*. Journal of Dynamics and Differential Equations, 4(1):127–159, 1992.
- [71] TOLSTOW, G. P.: *Maß und Integral*. Akademie-Verlag, Berlin, 1981.
- [72] TURAEV, D.: *On dimension of non-local bifurcational problems*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 6(5):919–948, 1996.
- [73] WEGMANN, H.: *Die Hausdorff-Dimension von kartesischen Produktmengen in metrischen Räumen*. J. Reine und Angew. Math., 234:163–171, 1969.

Versicherung

Hiermit versichere ich, daß ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe; die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher weder im Inland noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Erklärung

Die Dissertation mit dem Thema „Abschätzungen der Hausdorff-Dimension invarianter Mengen dynamischer Systeme auf Mannigfaltigkeiten unter besonderer Berücksichtigung nicht invertierbarer Abbildungen“ wurde an der Technischen Universität Dresden an der Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften im Institut für Analysis (Fachbereich Mathematik) unter der Betreuung von Doz. Dr. V. Reitmann angefertigt.